数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　補足プリント　No.4 （2024.5.7 配布）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります．

● $L^2(0,2\pi)$ における $\left(\dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ の完全性

$\phi_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ $(n \in \mathbb{Z})$ とおくとき，$(\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が正規直交系であることは演習問題 No.7 [**45**](1) にあります．ここでは，$(\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が完全正規直交系であることを示しましょう[1]．なお，この補足プリントの内容は期末試験の試験範囲には含まれません[2]．

そのために補題が二つ必要です．最初の補題は $1 \leq p < \infty$ のとき $C_0(\mathbb{R}^N)$ が $L^p(\mathbb{R}^N)$ において稠密であることの類似物です．

補題１． $1 \leq p < \infty$ とする．このとき，$C_{\mathrm{p}}([0,2\pi]) = \{f \in C([0,2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$ は $L^p(0,2\pi)$ において稠密である[3]．

［証明］ 任意に $f \in L^p(0,2\pi)$ と $\varepsilon > 0$ を取る．

$\delta > 0$ に対して $f_\delta(x) = \begin{cases} f(x) & (\delta < x < 2\pi - \delta) \\ 0 & \text{（その他）} \end{cases}$ とおくと，$L^p(0,2\pi) \subset L^1(0,2\pi)$ と Lebesgue の収束定理により

$$\exists \delta_0 > 0 \text{ s.t. } \|f - f_{\delta_0}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する（各自でチェックして欲しい）．また，$f_{\delta_0} \in L^p(\mathbb{R})$ と $\operatorname{supp} f_{\delta_0} \subset [\delta_0, 2\pi - \delta_0]$ に注意する．

次に，$C_0(\mathbb{R})$ が $L^p(\mathbb{R})$ で稠密であるから，

$$\exists g \in C_0(\mathbb{R}) \text{ s.t. } \|f_{\delta_0} - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

かつ $\operatorname{supp} g \subset [0,2\pi]$ が成立する[4]．すると，$g(0) = g(2\pi) = 0$ であるから $g \in C_{\mathrm{p}}([0,2\pi])$ であり，$\|f - g\|_p < \varepsilon$ である．■

次の補題を述べる前に，本日の講義で述べた $\mathbb{R}^N$ 上の二つの関数の**合成積 (convolution)** の類似物を述べておきます．

定義． $f, g \in L^1(0,2\pi)$ に対し，

$$\big(f * g\big)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)\,dy$$

[1] 昨年度の数理解析学 A・数理解析基礎講義 A では講義中に証明しました．

[2] ただし，$(\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が完全正規直交系であること，およびこのことから分かる事実については期末試験の試験範囲に含まれます．

[3] C_{p} の「p」は,「周期的」を表す periodic の頭文字です．ルベーグ空間の p と紛らわしいですが別の意味です．

[4] 単に「$\exists \widetilde{g} \in C_0(\mathbb{R})$ s.t. $\|\widetilde{g} - f_{\delta_0}\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$」ではなく，波線部の条件が付け加わっています．例えば，$h \in C_0(\mathbb{R})$ を $0 \leq h(x) \leq 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, $h(x) = 1$ $(\forall x \in [\delta_0, 2\pi - \delta_0])$, $\operatorname{supp} h \subset (0,2\pi)$ を満たすように取り，$g = \widetilde{g}h$ とおけば O.K. です．

と定める．ただし，f, g は周期 2π の関数として $\mathbb{R}$ 上に拡張しておく[5].

補題２． $f, g \in L^1(0, 2\pi)$ のとき，$\big(f * g\big)(x)$ はほとんどいたるところの $x \in (0, 2\pi)$ で定義され，$f * g \in L^1(0, 2\pi)$ かつ $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$ である．

[証明] 本日の講義で述べた $L^1(\mathbb{R}^N)$ に属する関数同士の合成積とほぼ同じ議論である．

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \big|\big(f * g\big)(x)\big|\,dx &\le \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x-y)||g(y)|\,dy\right) dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x-y)|\,dx\right) |g(y)|\,dy \quad (\because \text{ Fubini の定理}) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx\right) |g(y)|\,dy \quad (\because\ f(x) \text{ は周期 } 2\pi \text{ の関数}) \\
&= \|f\|_1 \int_0^{2\pi} |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1
\end{aligned}
$$

より示すことができる． ■

それでは，$(\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ の完全性の証明を行います．5/2 に紹介した完全正規直交系に関する同値な五つの命題のうち ① を示します．

[証明] 任意に $f \in L^2(0, 2\pi)$ と $\varepsilon > 0$ を取る．

（このとき，$\exists N \in \mathbb{N},\ \exists c_n \in \mathbb{C}\ (-N \le n \le N)$ s.t. $\left\| f - \displaystyle\sum_{-N \le n \le N} c_n \phi_n \right\|_2 < \varepsilon$ を示せばよい）

補題１により，

$$
\exists g \in C_{\mathrm{p}}([0, 2\pi]) \text{ s.t. } \|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}
$$

が成立する．（次に，この g を $(\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ の一次結合で L^2-ノルムで近似するのだが，実際には L^∞-ノルムで近似する）

$a_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx}\,dx$ とおく[6].

ここで，$0 < r < 1$ に対して，$h(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{inx}$ とおく．ここで，任意の $n \in \mathbb{Z}$ と $x \in [0, 2\pi]$ に対して

$$
\left| a_n r^{|n|} e^{inx} \right| \le \left(\int_0^{2\pi} |g(x) e^{-inx}|\,dx \right) r^{|n|} |e^{inx}| = \|g\|_1 r^{|n|}
$$

と $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|g\|_1 r^{|n|} < \infty$ より，Weierstrass の M-test を用いて級数は $[0, 2\pi]$ 上で一様絶対収束するから，$h \in C([0, 2\pi])$ であることに注意する．すると，

---

[5] $y \in [0, 2\pi]$ ならば $x - 2\pi \le x - y \le x$ ですが，$x \in [0, 2\pi)$ のとき，$x - 2\pi < 0$ ですので，このままでは $f(x-y)$ の値が定まらなくなってしまいます．

[6] 気持ちとしては $g(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ となっていて欲しいですが，この等式が各点で成立するかは分かりませんし，右辺は無限級数です（つまり,「無限個の一次結合」です）．

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^{2\pi}g(y)e^{-iny}\,dy\right)r^{|n|}e^{inx}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(y)r^{|n|}e^{in(x-y)}\,dy$$
$$=\int_0^{2\pi}g(y)\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}e^{in(x-y)}\right)dy$$

が成り立つ．最後の等号における無限和と積分の順序交換は，級数 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}e^{in(x-y)}$ が閉区間 $[0,2\pi]$ 上で一様絶対収束することと $g\in C([0,2\pi])$ であることから従う．いま，

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}e^{inx}=\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(re^{ix}\right)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(re^{ix}\right)^n\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(re^{ix}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(re^{-ix}\right)^n\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-re^{ix}}+\frac{re^{-ix}}{1-re^{-ix}}\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=:P_r(x)$$

である．$P_r(x)$ を用いて $h(x)=\big(P_r*g\big)(x)=\big(g*P_r\big)(x)$ と表せる．

次に，$\|g-h\|_\infty=\|g-g*P_r\|_\infty$ が $r\to1-0$ のとき 0 に近づくことを示したい．

<u>Claim.</u> ① $P_r(x)>0\ (\forall x\in[0,2\pi])$.

② $\displaystyle\int_0^{2\pi}P_r(x)\,dx=1.$

③ $\displaystyle\forall\delta>0,\ \lim_{r\to1-0}\left(\sup_{\delta\le x\le2\pi-\delta}P_r(x)\right)=0.$

$(\because)$ ① $\displaystyle P_r(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{(1-r\cos x)^2+(r\sin x)^2}>0\ (\forall x\in[0,2\pi]).$

② $n\in\mathbb{Z}$ に対して $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{inx}\,dx=\begin{cases}2\pi & (n=0)\\ 0 & (n\neq0)\end{cases}$ であるので，

$$\int_0^{2\pi}P_r(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}e^{inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}\int_0^{2\pi}e^{inx}\,dx=1.$$

③ $\displaystyle\sup_{\delta\le x\le2\pi-\delta}P_r(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}\to0\ (r\to1-0).$ ■

Claim. の③ は，r が 1 に近いとき $P_r(x)$ が $x=0$ と $x=2\pi$ の周りに集中していることを示している．では，$x\in[0,2\pi]$ に対して $\big|g(x)-\big(g*P_r\big)(x)\big|$ を評価しよう．

$$\big|g(x)-\big(g*P_r\big)(x)\big|=\left|\int_0^{2\pi}g(x)P_r(y)\,dy-\int_0^{2\pi}g(x-y)P_r(y)\,dy\right|\quad(\because ②)$$
$$\le\int_0^{2\pi}|g(x)-g(x-y)|P_r(y)\,dy\quad(\because ①)$$

$\displaystyle\lim_{r\to1-0}\|g-g*P_r\|_\infty=0$ を示すため，任意に $\varepsilon'>0$ を取る．$g\in C_{\mathrm{p}}([0,2\pi])$ は（$\mathbb{R}$ 上で）一様連続なので，

$$\exists\delta>0\ \text{s.t.}\ |y|<\delta\implies|g(x)-g(x-y)|<\varepsilon'\qquad\cdots\cdots(*)$$

が成立する．この δ を用いて

$$\left|g(x)-\big(g*P_r\big)(x)\right| \le \left(\int_0^{\delta}+\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}\right)|g(x)-g(x-y)|P_r(y)\,dy+\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|g(x)-g(x-y)|P_r(y)\,dy$$

と分解する．第 1 項は $(*)$ により $\varepsilon'\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi}P_r(y)\,dy=\varepsilon'$ で押さえられる．第 2 項は

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|g(x)-g(x-y)|P_r(y)\,dy &\le 2\pi\sup_{\delta\le y\le 2\pi-\delta}|g(x)-g(x-y)|\cdot\sup_{\delta\le y\le 2\pi-\delta}P_r(y)\\ &\le 4\pi\|g\|_\infty\sup_{\delta\le y\le 2\pi-\delta}P_r(y)\to 0\quad(r\to 1-0)\quad(\because ③)\end{aligned}$$

であるので，$\displaystyle\limsup_{r\to1-0}\|g-g*P_r\|_\infty\le\varepsilon'+0=\varepsilon'$ を得る．$\varepsilon'>0$ は任意であったから $\displaystyle\lim_{r\to1-0}\|g-g*P_r\|_\infty=0$ が示された．

証明に戻ろう．従って，（最初に取った $\varepsilon>0$ に対して）

$$\exists r_0\in(0,1)\ \text{s.t.}\ \|g-g*P_{r_0}\|_\infty<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$$

が成立する．このとき

$$\|g-g*P_{r_0}\|_2=\left(\int_0^{2\pi}\left|g(x)-\big(g*P_{r_0}\big)(x)\right|^2dx\right)^{\frac12}<\left(2\pi\left(\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}\right)^2\right)^{\frac12}=\frac{\varepsilon}{3}$$

を得る．

最後に，$\big(g*P_{r_0}\big)(x)=\displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nr_0^{|n|}e^{inx}$ は $[0,2\pi]$ 上で一様絶対収束するので，

$$\exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \left\|g*P_{r_0}-\frac{1}{2\pi}\sum_{-N\le n\le N}a_nr_0^{|n|}e^{inx}\right\|_\infty<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$$

が成立する．この N に対して，先程と同様にして $\displaystyle\left\|g*P_{r_0}-\frac{1}{2\pi}\sum_{-N\le n\le N}a_nr_0^{|n|}e^{inx}\right\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$ を得る．

以上三つを合わせれば，$\displaystyle\left\|f-\frac{1}{2\pi}\sum_{-N\le n\le N}a_nr_0^{|n|}e^{inx}\right\|_2<\varepsilon$ を得る． ■

例． 区間を $[-\pi,\pi]$ とする（こうしても結果は変わらない）．

$f(x)=x\in L^2(-\pi,\pi)$ とおく．Fourier 係数 $a_n=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}xe^{-inx}\,dx$ を計算すると，$n=0$ のとき $a_0=0$ であり，$n\neq0$ のとき

$$a_n=\left[\frac{1}{-in}xe^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{-in}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}\,dx=\frac{\pi}{-in}e^{-in\pi}-\frac{-\pi}{-in}e^{in\pi}=\frac{2\pi}{-in}(-1)^n$$

であるから，L^2-収束の意味で $x=\displaystyle\sum_{n\neq0}\frac{(-1)^n}{-in}e^{inx}$ が成立する[7]．

Parseval の等式により $\|f\|_2^2=\displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2=\frac{1}{2\pi}\cdot2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi^2}{n^2}=4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が成立するが，$\|f\|_2^2=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{3}\pi^3$ であるので，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2}{3}\pi^3=\frac{\pi^2}{6}$ を得る．

[7] 右辺の級数は $[-\pi,\pi]$ 上で一様絶対収束しません．例えば $x=\pi$ を代入するとどうなるでしょうか？