数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　補足プリント　No.3（2024.4.23 配布）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

> **定理.** $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする.
> このとき，次を満たす Banach 空間 $(\widetilde{X}, \|\cdot\|')$ と線形写像 $i : X \to \widetilde{X}$ が存在する.
> (i) i は単射であり，かつ任意の $u \in X$ に対して $\|i(u)\|' = \|u\|$.
> (ii) X の i による像 $i(X)$ は $\widetilde{X}$ において稠密である.
>
> しかも，(i), (ii) を満たす Banach 空間 $(\widetilde{X}, \|\cdot\|')$ は同型を除いて一意に定まる.

この**定理**で定まる $(\widetilde{X}, \|\cdot\|')$ を $(X, \|\cdot\|)$ の**完備化**と呼ぶ.

[証明]　(i), (ii) を満たす Banach 空間の存在

X における Cauchy 列 (u_n) 全体の集合を X_0 とおく.

X_0 に $(u_n) \sim (v_n) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\| = 0$ という同値関係を入れ，$\widetilde{X} = X_0/\sim$ とおく.
(「$\sim$」が同値関係であることは各自確かめよ)

$\widetilde{u} = [(u_n)] \in \widetilde{X}$ に対し，$(u_n) \in X_0$ が X の Cauchy 列であるので

$$\big|\|u_n\| - \|u_m\|\big| \le \|u_n - u_m\| \to 0 \ \ (n, m \to \infty) \qquad (\because \text{ 三角不等式})$$

が成立し $(\|u_n\|)$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列であることがわかる．従って $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|$ が存在するので，それを $\|\widetilde{u}\|' \left(= \big\|[(u_n)]\big\|'\right)$ と定める.

• $\|\cdot\|'$ の well-definedness

$(u_n), (v_n) \in X_0$ が $(u_n) \sim (v_n)$ であるとすると，

$$\big|\|u_n\| - \|v_n\|\big| \le \|u_n - v_n\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

であるから，$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| - \lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \lim_{n\to\infty} (\|u_n\| - \|v_n\|) = 0$ となり，$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|$ である.

• $\|\cdot\|'$ が $\widetilde{X}$ のノルムであること

三角不等式のみ示す．$[(u_n)], [(v_n)] \in \widetilde{X}$ に対し，$\|u_n + v_n\| \le \|u_n\| + \|v_n\|$ であるから

$$\begin{aligned}\big\|[(u_n)] + [(v_n)]\big\|' = \big\|[(u_n + v_n)]\big\|' &= \lim_{n\to\infty} \|u_n + v_n\| \\ &\le \lim_{n\to\infty} (\|u_n\| + \|v_n\|) \\ &= \lim_{n\to\infty} \|u_n\| + \lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \big\|[(u_n)]\big\|' + \big\|[(v_n)]\big\|'.\end{aligned}$$

• $\widetilde{X}$ が $\|\cdot\|'$ に関して完備であること

$(\widetilde{v}_m) \subset \widetilde{X}$ を $\|\cdot\|'$ に関する Cauchy 列であるとする．各 $\widetilde{v}_m$ を $[(v_{mn})]$ と書く（$(v_{mn})_{n=1}^{\infty}$ は X の Cauchy 列）．演習問題 [**20**] より $(\widetilde{v}_m)$ のある部分列が収束すればよい.

いま，$(\widetilde{v}_m)$ が Cauchy 列であることから，部分列をうまく取って（同じ記号 $(\widetilde{v}_m)$ で表す）$\|\widetilde{v}_{m+1} - \widetilde{v}_m\|' < \dfrac{1}{2^m}$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ とできる.

まず $\|\widetilde{v}_2 - \widetilde{v}_1\|' = \lim_{n\to\infty} \|v_{2n} - v_{1n}\| < \dfrac{1}{2}$ であるから，$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $n \ge N_1 \Longrightarrow \|v_{2n} - v_{1n}\| < \dfrac{1}{2}$ が成立する.

次に $\|\widetilde{v}_3 - \widetilde{v}_2\|' = \lim_{n\to\infty} \|v_{3n} - v_{2n}\| < \dfrac{1}{4}$ であるから，$\exists N_2 > N_1$ s.t. $n \geq N_2 \Longrightarrow \|v_{3n} - v_{2n}\| < \dfrac{1}{4}$ が成立する．

以下同様に，$\|\widetilde{v}_{m+1} - \widetilde{v}_m\|' = \lim_{n\to\infty} \|v_{m+1,n} - v_{mn}\| < \dfrac{1}{2^m}$ であるから，$\exists N_m > N_{m-1}$ s.t. $n \geq N_m \Longrightarrow \|v_{m+1,n} - v_{mn}\| < \dfrac{1}{2^m}$ が成立する．

これを模式的に書くと

$$
\begin{array}{l}
(v_{1n}) = (\, v_{11},\, v_{12},\, v_{13},\, v_{14},\, v_{15},\, v_{16},\, v_{17},\, v_{18},\, v_{19}, \ldots\ldots) \\
(v_{2n}) = (\, v_{21},\, v_{22},\, v_{23},\, v_{24},\, v_{25},\, v_{26},\, v_{27},\, v_{28},\, v_{29}, \ldots\ldots) \\
(v_{3n}) = (\, v_{31},\, v_{32},\, v_{33},\, v_{34},\, v_{35},\, v_{36},\, v_{37},\, v_{38},\, v_{39}, \ldots\ldots) \\
(v_{4n}) = (\, v_{41},\, v_{42},\, v_{43},\, v_{44},\, v_{45},\, v_{46},\, v_{47},\, v_{48},\, v_{49}, \ldots\ldots) \\
(v_{5n}) = (\, v_{51},\, v_{52},\, v_{53},\, v_{54},\, v_{55},\, v_{56},\, v_{57},\, v_{58},\, v_{59}, \ldots\ldots) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\hline
(w_n) := (\, v_{11},\, v_{12},\, v_{13},\, v_{24},\, v_{25},\, v_{36},\, v_{37},\, v_{38},\, v_{49}, \ldots\ldots)
\end{array}
$$

…各項ごとの差のノルム $< 1/2$

…各項ごとの差のノルム $< 1/4$

…各項ごとの差のノルム $< 1/8$

…各項ごとの差のノルム $< 1/16$

○印をつけた元を並べた X の点列を (w_n) と定めると，(w_n) は X の Cauchy 列となっているので $\widetilde{w} := [(w_n)] \in \widetilde{X}$ である．

すると，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $\|v_{1n} - w_n\| < 1$ であるから（なぜか？），$\|\widetilde{v}_1 - \widetilde{w}\|' = \lim_{n\to\infty} \|v_{1n} - w_n\| \leq 1$ が得られる．

同様にして，$\|\widetilde{v}_2 - \widetilde{w}\|' \leq \dfrac{1}{2}, \ldots, \|\widetilde{v}_m - \widetilde{w}\|' \leq \dfrac{1}{2^{m-1}}, \ldots$ が得られる．従って $\|\widetilde{v}_m - \widetilde{w}\|' \to 0$ $(m \to \infty)$ であるから，$\widetilde{w}$ は $\widetilde{X}$ における $(\widetilde{v}_m)$ の極限であることが言えた．

• $i : X \to \widetilde{X}$ の構成と (i), (ii) のチェック

$u \in X$ に対して，$i(u) = [(u, u, u, \ldots)]$ と定める．

明らかに $i : X \to \widetilde{X}$ は線形かつ単射であり，$u \in X$ に対して $\|i(u)\|' = \|u\|$ である．

任意の $\widetilde{u} = [(u_n)] \in \widetilde{X}$ に対して，点列 $\bigl(i(u_m)\bigr)_{m=1}^{\infty} \subset i(X)$ が $\widetilde{u}$ に収束することを示す．

任意に $\varepsilon > 0$ を取り固定する．(u_n) は X の Cauchy 列であるから，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$m, n \geq N \Longrightarrow \|u_m - u_n\| < \varepsilon$ を満たす．このとき，$m \geq N$ ならば

$$\|i(u_m) - \widetilde{u}\|' = \lim_{n\to\infty} \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

を満たすので，$\lim_{m\to\infty} i(u_m) = \widetilde{u}$ であることが証明された．

(i), (ii) を満たす Banach 空間が同型を除いて一意であること

(i), (ii) を満たす Banach 空間と線形写像の組 $((\widetilde{X}, \|\cdot\|'), i)$ と $((X^*, \|\cdot\|^*), i^*)$ があったとする．このとき，$f : \widetilde{X} \to X^*$ を次のように定義する．

任意に $\widetilde{u} \in \widetilde{X}$ を取ると，(ii) より $\widetilde{u} = \lim_{n\to\infty} i(u_n)$ を満たす X の点列 (u_n) が存在する．このとき，(i) より

$$
\begin{aligned}
\|i^*(u_n) - i^*(u_m)\|^* &= \|i^*(u_n - u_m)\|^* = \|u_n - u_m\| \\
&= \|i(u_n - u_m)\|' = \|i(u_n) - i(u_m)\|' \to 0 \quad (n, m \to \infty)
\end{aligned}
$$

が成立する．即ち $\bigl(i^*(u_n)\bigr)$ は X^* の Cauchy 列となるので，完備性から $\lim_{n\to\infty} i^*(u_n) =: u^* \in X^*$ が存在する．そこで $f(\widetilde{u}) = u^*$ によって写像 $f : \widetilde{X} \to X^*$ を定める．

この f が well-defined であること，線形同型であること，$i^* = f \circ i$ と $\|\widetilde{u}\|' = \|f(\widetilde{u})\|^*$ $(\forall \widetilde{u} \in \widetilde{X})$ が成立することの証明は各自に任せる．