数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　補足プリント No.2　(2024.4.11 配布)

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

Lebesgue 積分に現れる**単調収束定理**，**Lebesgue の収束定理**と裏面にある **Fubini の定理**は大変重要ですので理解しておいてください（はじめの二つの定理は次回の講義で用いる予定です）．

定理.（単調収束定理）
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合，(f_n) を Ω 上の可測関数列，f を Ω 上の可測関数とする．いま，

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ a.e. $x \in \Omega$,
(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. $x \in \Omega$

が成り立つと仮定する．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx$$

が成立する．**（f_n が非負値であることが重要！）**

定理.（Lebesgue の収束定理）
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合，(f_n) を Ω 上の可測関数列，f を Ω 上の可測関数とする．いま，

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. $x \in \Omega$,
(ii) ある可積分関数 h が存在して，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n(x)| \leq h(x)$ a.e. $x \in \Omega$

が成り立つと仮定する．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx$$

が成立する．**（f_n が n に依らない可積分関数 h で押さえられることが重要！）**

その他，この講義で必要な性質をいくつか列挙します．無論，これで全てというわけではありません．

定義. $\mathbb{R}^N$ 上の Lebesgue 測度 を m と書くことにする．$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合とし，Ω 上の可測関数 f, g に対して

$$\exists C \subset \mathbb{R}^N \ \text{s.t.}\ m(C) = 0 \text{ かつ } f(x) = g(x)\ (\forall x \in \Omega \setminus C)$$

が成立するとき，f と g は Ω 上**ほとんどいたるところ等しい**といい,「$f = g$ a.e.」または「$f(x) = g(x)$ a.e. $x \in \Omega$」と表す.

命題 A. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合，f, g を Ω 上の可測関数とする.

(1) f が Ω 上で可積分（i.e. $\displaystyle\int_\Omega |f(x)|\,dx < \infty$）かつ $f(x) = g(x)$ a.e. $x \in \Omega$ ならば，g も Ω 上で可積分であり $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\,dx$ が成立する.
(2) $\displaystyle\int_\Omega |f(x)|\,dx = 0 \overset{\text{同値}}{\iff} f(x) = 0$ a.e. $x \in \Omega$.
(3) f が Ω 上で可積分ならば $|f(x)| < \infty$ a.e. $x \in \Omega$.
(4) g が Ω 上の非負値可積分関数かつ $|f(x)| \leq g(x)$ a.e. $x \in \Omega$ ならば，f も Ω 上で可積分.

定理 B. $A \subset \mathbb{R}^N$ を (Lebesgue) 可測集合とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある閉集合 F とある開集合 G が存在して $F \subset A \subset G$ かつ $m(G \setminus F) < \varepsilon$ が成立する．また，$m(A) < \infty$ であれば F として有界閉集合を取ることができる.

定理（Fubini の定理）． $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ を可測集合とする．

(I) $f = f(x,y)$ が $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上の**非負値可測関数**ならば，次の (1)-(3) が成立する．

(1) $x \in \Omega_1$ を固定するごとに $y \mapsto f(x,y)$ は Ω_2 上可測であり，さらに $x \mapsto \displaystyle\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy$ は Ω_1 上可測．

(2) $y \in \Omega_2$ を固定するごとに $x \mapsto f(x,y)$ は Ω_1 上可測であり，さらに $y \mapsto \displaystyle\int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx$ は Ω_2 上可測．

(3) $\displaystyle\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\,dxdy = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\right)dy.$

（即ち，被積分関数が非負値ならば自由に積分の順序は交換して良い！
←ただし「$\infty = \infty$」を許す）

(II) $f = f(x,y)$ が $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上の**可積分関数**ならば，次の (1)-(3) が成立する．

(1) $x \in \Omega_1$ を固定するごとに $y \mapsto f(x,y)$ は Ω_2 上可測であり，さらに a.e. $x \in \Omega_1$ に対し $y \mapsto f(x,y)$ は Ω_2 上可積分．このとき

$$g(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy & (y \mapsto f(x,y) \text{ は } \Omega_2 \text{ 上可積分}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とおけば，g は Ω_1 上可積分．

(2) $y \in \Omega_2$ を固定するごとに $x \mapsto f(x,y)$ は Ω_1 上可測であり，さらに a.e. $y \in \Omega_2$ に対し $x \mapsto f(x,y)$ は Ω_1 上可積分．このとき

$$h(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx & (x \mapsto f(x,y) \text{ は } \Omega_1 \text{ 上可積分}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とおけば，h は Ω_2 上可積分．

(3) $\displaystyle\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\,dxdy = \int_{\Omega_1} g(x)\,dx = \int_{\Omega_2} h(y)\,dy.$

注意． ほとんどいたるところ一致する関数を同一視すれば，(3) は

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\,dxdy = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\right)dy$$

と書くことができる．

（即ち，被積分関数が直積測度に関して可積分ならば，積分の順序は交換して良い！）