数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　補足プリント No.1　（2024.4.9 配布）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

定義.（線形空間） $\mathbb{K}$ を体（通常は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$），X を集合とする.

任意の 2 元 $u, v \in X$ に対して $u+v \in X$ が，また任意の元 $u \in X$ と任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して $\alpha u \in X$ が定義されていて，次の条件が満たされているとき，X は $\mathbb{K}$ 上の**線形空間**であるという.（以下，$u, v, w \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ は任意）

(1)（加法の結合則） $(u+v)+w = u+(v+w)$.
(2)（加法の交換則） $u+v = v+u$.
(3)（零元の存在） $\exists \theta \in X$ s.t. $\forall u \in X$, $u+\theta = u$.
(4)（加法の逆元の存在） $\forall u \in X$, $\exists u' \in X$ s.t. $u+u' = \theta$. （以下，u' を $-u$ と書く）
(5)（分配則） $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$, $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$.
(6)（スカラー積の結合則） $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$.
(7)（$\mathbb{K}$ の単位元とのスカラー積） $1u = u$.

注意.

(i) (3) を満たす θ はただ一つしか存在しない．以下，θ を 0 と書き，X の**零元**という[1].

(ii) $u \in X$ に対して，(4) を満たす u' もただ一つしか存在しない．以下，u' を $-u$ と書く.
（(i),(ii) の証明は演習問題 [**1**](1),(2)）

講義でも述べますが，以下では何の断りもなければ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とします.

定義.（部分空間） X を線形空間，M を X の空でない部分集合とする.

M が X の**（線形）部分空間**

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \quad u, v \in M \implies u+v \in M. \\ \text{(ii)} \quad u \in M,\ \alpha \in \mathbb{C} \implies \alpha u \in M. \end{cases}$$

$$\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \text{「}u, v \in M,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \implies \alpha u + \beta v \in M.\text{」}$$

定義. $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする.

- $u_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ に対し，$B(u_0, \varepsilon) := \{u \in X \mid \|u - u_0\| < \varepsilon\}$. （$u_0$ の **ε-近傍**）
- $G \subset X$ が**開集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall u \in X, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(u, \varepsilon) \subset G$
  $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ 「$\forall u \in X, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $\|v - u\| < \varepsilon \implies v \in G$.」
- $X_0 \subset X$ に対し，$u \in X$ が X_0 の**集積点**
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists (u_n)_{n=1}^{\infty} \subset X_0$ s.t. $u_n \neq u$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) かつ $\lim_{n\to\infty} u_n = u$.
- X_0 および X_0 の集積点全体からなる集合を X_0 の**閉包**とよび，$\overline{X_0}$ とかく.
- $E \subset X$ が**閉集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ E の補集合 E^c が開集合
  $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} E = \overline{E}$
  $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ 「$(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ かつ $\lim_{n\to\infty} u_n = u \implies u \in E$.」
- X_0 が X において**稠密** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \overline{X_0} = X$
  $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \forall u \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists u_0 \in X_0$ s.t. $\|u_0 - u\| < \varepsilon$.
- X が稠密な可算部分集合をもつとき，X は**可分**であるという.

[1] X の零元 0 と数 0 とは本来別のものですが，同じ記号 0 で表すことにします．混乱のなきよう.