数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.9　（2024.5.9 出題）

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません.

◆ $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^M$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合，$k(x,y)$ を $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上の複素数値可測関数とし，Ω_2 上の可測関数 u に対して

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega_2} k(x,y)u(y)\,dy, \quad x \in \Omega_1$$

で $Ku : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ を定義する.（**[58]**，**[59]**）

[58] x, y に無関係な正定数 M_1, M_2 によって

$$\int_{\Omega_2} |k(x,y)|\,dy \le M_1 \quad (\forall x \in \Omega_1), \qquad \int_{\Omega_1} |k(x,y)|\,dx \le M_2 \quad (\forall y \in \Omega_2)$$

が成立していると仮定する．このとき，任意の $p \in [1,\infty]$ に対して $K \in B\bigl(L^p(\Omega_2), L^p(\Omega_1)\bigr)$ であり，作用素ノルムは $\|K\| \le M_1^{1-1/p} M_2^{1/p}$ を満たすことを示せ.

[59] (1) $k(x,y)$ が $C = \displaystyle\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |k(x,y)|^2\,dxdy < \infty$ を満たすならば，$K \in B\bigl(L^2(\Omega_2), L^2(\Omega_1)\bigr)$ であり，作用素ノルムは $\|K\| \le \sqrt{C}$ を満たすことを示せ.（このような $k(x,y)$ を **Hilbert-Schmidt 型の核**，K を **Hilbert-Schmidt 型積分作用素**と呼びます）

(2) Ω_1, Ω_2 をともに $\mathbb{R}^N$ の単位球 $B(0,1)$ とする．このとき，正数 λ に対して

$$(Ku)(x) = \int_{B(0,1)} \frac{u(y)}{|x-y|^\lambda}\,dy, \quad x \in B(0,1)$$

と定義する．このとき，K が $L^2(B(0,1))$ 上の Hilbert-Schmidt 型積分作用素となる λ の範囲を求めよ.

[60] X, Y を Banach 空間とし，$(T_n)_{n=1}^\infty \subset B(X,Y)$ とする．いま，各 $u \in X$ に対し，$(T_n u)_{n=1}^\infty$ が収束すると仮定する．このとき，極限を Tu と書くと写像 $T : X \to Y$ が定義できる.

(1) T は線形写像であることを示せ.

(2) 一様有界性原理を用いて $T \in B(X,Y)$ を示し，さらに $\|T\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$ を示せ.

[61] X, Y を Banach 空間とし，$(T_n)_{n=1}^\infty \subset B(X,Y)$ とする．いま，次の二つの条件を満たすと仮定する.

(i) ある正数 $C > 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|T_n\| \le C$.

(ii) X で稠密な集合 D が存在して，任意の $u \in D$ に対して $(T_n u)_{n=1}^\infty$ は収束する.

このとき，実は任意の $u \in X$ に対し，$(T_n u)_{n=1}^\infty$ が収束することを示せ.（すると，**[60]** の結果から $Tu := \lim_{n\to\infty} T_n u$ と定めると $T \in B(X,Y)$ かつ $\|T\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$ がわかる.）

（裏面に続く）

[62] 一様有界性原理は，定義域 X が Banach 空間でなく単にノルム空間のときには成り立たないことを見よう.

複素係数の多項式全体の集合を P とし，P のノルムとして演習問題 No.1 **[8]** の問題文にある $|||\cdot|||$ を考える.

(1) $(P, |||\cdot|||)$ は完備ではないことを示せ.

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対し，$T_n : P \to \mathbb{C}$ を次のように定義する：$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ に対して $T_n f = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j$．ただし，$n > k$ のときは，$a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$ とする.

(i) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$T_n \in B(P, \mathbb{C})$ であることを示せ.

(ii) $f \in P$ を固定すると $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n f| < \infty$ であることを示せ.

(iii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\|T_n\| \geq n$ であることを示せ.（従って $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = \infty$）

[63] X, Y, Z を Banach 空間とする．写像 $T : X \times Y \to Z$ は次を満たすと仮定する.

- 各 $u \in X$ に対し，$\varphi_u(v) = T(u, v)$ で φ_u を定義すると $\varphi_u \in B(Y, Z)$.
- 各 $v \in Y$ に対し，$\psi_v(u) = T(u, v)$ で ψ_v を定義すると $\psi_v \in B(X, Z)$.

このとき，T は $X \times Y$ 上で連続であることを示せ.

[64] X を Banach 空間とし，Y, Z を X の閉部分空間とする．いま，任意の $u \in X$ が $u = v_1 + v_2$（ただし $v_1 \in Y$, $v_2 \in Z$）という形に一意的に表せるものと仮定する．このとき，写像 $T : X \to Y$ を $Tu = v_1$ で定義すると，$T \in B(X, Y)$ であることを示せ[1].

[65] X, Y を Banach 空間，X_0 を X の稠密な線形部分空間とする．いま，線形写像 $T_0 : X_0 \to Y$ が次の条件を満たすと仮定する.

$$(*) \quad \exists C > 0 \ \text{ s.t. } \ \forall u \in X_0,\ \|T_0(u)\|_Y \leq C\|u\|_X.$$

(1) T_0 は定義域が X 全体である有界線形作用素 T に一意的に拡張できることを示せ．即ち，次の性質を満たす $T \in B(X, Y)$ がただ一つ存在することを示せ：

$$u \in X_0 \implies T_0(u) = T(u).$$

(2) T_0 が閉作用素であり，$(*)$ を満たすと仮定する．このとき，実は $X_0 = X$ であることを示せ.（このとき T_0 自身が $T_0 \in B(X, Y)$ を満たしている）

[66] X, Y を Banach 空間とする．線型作用素 $T : D(T) \to Y$ が閉作用素である（ただし $D(T)$ は X の部分空間）とき，集合 $N(T) = \{u \in D(T) \mid Tu = 0\}$ は X の閉部分空間であることを示せ.

---

[1] X が Hilbert 空間で，Y が X の閉部分空間という状況であればとても簡単な問題ですが（このとき，$Z = Y^\perp$ として $u \in X$ を $v_1 \in Y$ と $v_2 \in Z$ の和に直交分解すれば，$\|u\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \geq \|v_1\|^2 = \|Tu\|^2$ から T の有界性が言える），この問題は X が Banach 空間と仮定していることに注意して下さい．証明には**閉グラフ定理**を用います.