数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.8　　（2024.5.7 出題）

演習問題は `http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html` にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません.

[50] X を Banach 空間，$T, S \in B(X)$ とする．線形写像 $TS : X \to X$ を $(TS)u = T(Su)$ $(u \in X)$ で定義し，さらに $T^2u = T(Tu)$, $T^3u = T(T(Tu)), \ldots$ と定義する．次を示せ.

(1) $TS \in B(X)$ で $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.　　(2) $T^n \in B(X)$ $(n \in \mathbb{N})$ で $\|T^n\| \leq \|T\|^n$.

[51] この問題では，有界な線形作用素および有界でない線形作用素の例を扱う．例えば，$I = (a, b)$ を有界開区間，$X = L^2(I), Y = L^1(I)$ とし，$f \in X$ に対し $Tf = f$ と定めると，$T \in B(X, Y)$ であり，$\|T\| = \sqrt{b-a}$ となることは演習問題 No.3 [**17**](2) の結果より分かる[1].

(1) $X = \ell^1$, $Y = \ell^2$ とし，$x = (x_n)_{n=1}^\infty \in X$ に対し $Tx = x$ と定める．このとき，$T \in B(X, Y)$ であること，および $\|T\| = 1$ を示せ[2].

(2) $I = (0, 1)$, $X = Y = \mathcal{B}(I)$ とおく．X から Y への作用素 T を，定義域が $D(T) = \mathcal{B}^1(I)$ で，$f \in D(T)$ に対し $Tf = f'$（微分作用素）とおく．このとき，線形作用素 T は**有界ではない**ことを示せ．（ヒント：$f_n(x) = \sin n\pi x$ を考えると……）

(3) $I = (0, 1)$, $X = \mathcal{B}^1(I)$, $Y = \mathcal{B}(I)$ とおく．$f \in X$ に対し $Tf = f'$ とおくとき，$T \in B(X, Y)$ であることを示し，$\|T\| = 1$ であることを証明せよ[3].
（$\|T\| \leq 1$ は容易に示せます．$\|T\| \geq 1$ であることを示すため，任意の $\varepsilon > 0$ を 1 つ取ったとき，$\|Tf\|_{\mathcal{B}(I)} \geq (1-\varepsilon)\|f\|_{\mathcal{B}^1(I)}$ を満たす $f \in \mathcal{B}^1(I)$ を見つけてみよう.）

[52] $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を Lebesgue 測度が 0 でない可測集合とし，$\varphi \in L^\infty(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$ とする．このとき，$f \in L^p(\Omega)$ に対し，$(T_\varphi f)(x) = f(x)\varphi(x)$ とおく.

(1) $T_\varphi \in B(L^p(\Omega))$ であることを示せ.

(2) $T_\varphi \in B(L^p(\Omega))$ の作用素ノルムは $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ であることを示せ.

(3) $\|f\|_p = 1$ かつ $\|T_\varphi f\|_p = \|\varphi\|_\infty$ を満たす $f \in L^p(\Omega)$ が存在するための φ に関する必要十分条件を求めよ.

[53] $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ を複素数列とし，$X = \ell^2$ とおく．$x = (x_n)_{n=1}^\infty \in X$ に対し $Tx := (\alpha_n x_n)_{n=1}^\infty$ と定める.

(1) $(\alpha_n) \in \ell^\infty$ であるとき，$T \in B(X)$ であることを示し，$\|T\|$ を求めよ.

(2) $T \in B(X)$ であるための，数列 (α_n) に関する必要十分条件を求めよ.

（裏面に続く）

[1] 恒等写像 $f \overset{T}{\mapsto} f$ により $L^2(I)$ が $L^1(I)$ の中に埋め込まれていることが分かります．T を**埋め込み作用素**と呼びます．因みに，[**17**](2) の答えは $\sqrt{b-a}$ です.

[2] 演習問題 No.4 [**28**](1) によって $\ell^1 \subset \ell^2$ が示されていますので，線形作用素 T は well-defined です.

[3] (2) と (3) の結果の違いについてよく吟味して下さい.

[54] X, Y を Banach 空間，$T : X \to Y$ を線形写像とする．いま，X, Y が有限次元かつ $D(T) = X$ であるならば，実は $T \in B(X, Y)$ であることを示せ．

[55] 次の条件をすべて満たす Banach 空間 X と線形作用素の列 $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ の例を挙げよ．

(i) X は無限次元 Banach 空間.
(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n \in B(X)$.
(iii) 任意の $u \in X$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|T_n u - u\| = 0$.
(iv) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|T_n - I\| = 1$．ただし I は X 上の恒等作用素である．

[56] X を無限次元 Banach 空間とするとき，次の**条件**を満たす点列 $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ は存在しないことを示せ.（ヒント：Baire の category 定理）

条件：X の任意の元は，$(u_n)_{n=1}^{\infty}$ のうちの有限個の元の 1 次結合で表せる．

[57] $n \in \mathbb{N}$ に対して，次の**条件**を満たす関数 $f \in C([0,1])$ 全体の集合を X_n とおく．

条件：ある $x \in [0,1]$ が存在して，任意の $y \in [0,1]$ に対して $\|f(x) - f(y)\| \leq n\|x - y\|$ が成り立つ.

(1) X_n は Banach 空間 $C([0,1])$ の閉部分集合であることを示せ.

(2) X_n は内点をもたないことを示せ.

(3) 上の (1), (2) と Baire の category 定理からわかることを述べよ.