数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.7　　（2024.5.2 出題）

演習問題は `http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html` にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題（一部はレポート問題）ですが，演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません.

[45] (1) $L^2(0, 2\pi)$ において，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ が正規直交系であることを示せ.

（実は完全正規直交系なのですが，それを講義で示すかどうかは後日決めます）

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対し，数列 $a^{(n)}$ を $a^{(n)} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$（第 n 項のみ 1，他の項はすべて 0）と定める．このとき，$\left(a^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ は ℓ^2 の完全正規直交系であることを示せ.

（講義で述べた 5 条件のうち，どれを確かめるのがカンタンでしょうか？）

[46] $L^2(-1, 1)$ において，$f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3, \ldots$ に Schmidt の直交化を行って正規直交系の最初の 4 つ $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$ を計算せよ[1].

[47] $(0, \infty)$ 上の可測関数 f で $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-x}\, dx < \infty$ を満たすもの全体の集合を H とおき，$f, g \in H$ に対して $(f, g) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\overline{g(x)} e^{-x}\, dx$ と定める.

(1) $(\cdot, \cdot)$ は H 上の内積であることを示せ.

(2) $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3, \ldots$ に Schmidt の直交化を行って正規直交系の最初の四つ $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \psi_3(x)$ を計算せよ[2].

（裏に続く）

---

[1] $P_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}\, \phi_n(x)$ は **Legendre の多項式**と呼ばれ，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$ が成立します. 余力のある方はこれも証明してみましょう．また関数列 $(\phi_n(x))_{n=0}^{\infty}$ は $L^2(-1, 1)$ の完全正規直交系となっています.

[2] H は Hilibert 空間となっており，関数列 $(\psi_n(x))_{n=0}^{\infty}$ は H の完全正規直交系であることが示されます（証明は伊藤清三「ルベーグ積分入門」（裳華房）等で）．また，$L_n(x) = (-1)^n \psi_n(x)$ は **Laguerre の多項式**と呼ばれます.

[48] $L^2(0,1)$ の元 $r_n = r_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を次のように定める[3,4]：

> $x \in (0,1)$ に対し，x の二進小数展開を $x = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots_{(2)}$ とするとき，
>
> $$r_n(x) = \begin{cases} 1 & (a_n = 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (a_n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$
>
> と定める．ただし，有限小数の場合は二進小数展開は一意ではない．例えば $0.11000\cdots_{(2)} = 0.10111\cdots_{(2)}$ であるが，その場合は常に後者の表し方をする．

さらに，$x \in (0,1)$ に対し $r_0(x) = 1$ と定める．

(1) $(r_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ は $L^2(0,1)$ の正規直交系であることを示せ．

(2) $(r_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ のうち任意の有限個を掛けてできる関数族

$$\left(r_{n_1}r_{n_2}\cdots r_{n_p}\right)_{0\le n_1<n_2<\cdots<n_p}$$

を Φ とおく．このとき，Φ も $L^2(0,1)$ の正規直交系であることを示せ．

(3) $m \in \mathbb{N}$ に対し，区間 $(0,1)$ を 2^m 等分してできる各小区間上では定数であるような関数全体を M_m とおく（M_m は $L^2(0,1)$ の部分空間である）．また，関数族

$$\left(r_{n_1}r_{n_2}\cdots r_{n_p}\right)_{0\le n_1<n_2<\cdots<n_p\le m}$$

を Φ_m とおく．このとき，Φ_m は M_m の**完全**正規直交系であることを示せ．

(4) 関数族 Φ は $L^2(0,1)$ の**完全**正規直交系であることを示せ．

（ヒント：「$\Phi = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Phi_m$」「$\bigcup_{m=1}^{\infty} M_m$ は $L^2(0,1)$ で稠密」の二つを示す）

[49] $\left(X, \|\cdot\|_X\right), \left(Y, \|\cdot\|_Y\right)$ をノルム空間，$T : X \to Y$ を $D(T) = X$ を満たす線形写像とする．

(1) $\displaystyle\sup_{\|u\|_X\le 1} \|Tu\|_Y = \sup_{\|u\|_X=1} \|Tu\|_Y = \sup_{u\neq 0} \frac{\|Tu\|_Y}{\|u\|_X}$ を示せ.（この式の値を $\|T\|$ と定める）

(2) $B(X,Y) = \{T \mid T$ は X から Y への有界線形作用素，かつ $D(T) = X\}$ は (1) で定めた $\|\cdot\|$ によって（通常の写像の和・スカラー積を演算として）ノルム空間となることを示せ．

---

[3] 区間 $(0,1)$ の任意の元 x は次のように表示することができます．

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \qquad a_n \in \{0,1\}.$$

これを**二進小数展開**と呼び，$x = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots_{(2)}$ と書きます．

[4] 関数族 $(r_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ は **Rademacher の直交関数系**と呼ばれます．