数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.6　（2024.4.25 出題）

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを後日レポート問題に指定するかもしれません.

[**36**]（**内積の連続性**）H を内積空間とする．点列 $(u_n)_{n=1}^{\infty}, (v_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ と元 $u, v \in H$ が $u_n \to u$, $v_n \to v$ $(n \to \infty)$ を満たすとき，$(u_n, v_n) \to (u, v)$ $(n \to \infty)$ が成り立つことを示せ.

[**37**] H を内積空間とする．$u, v \in H$ に対して次を示せ.

(1)（**中線定理**）$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

(2) $$4(u, v) = \sum_{k=0}^{3} i^k \|u + i^k v\|^2.$$

[**38**] (1) 一般のノルム空間では前問 [**37**](1) の等式は成立しない．例を挙げよ.
（L^1 や ℓ^1 などで考えれば良いですが，一番簡単なのは $\mathbb{C}^2$ でノルムを $\|(z, w)\| = |z| + |w|$ としたものでしょうか）

(2) 一般のノルム空間では [**37**](2) の式で (u, v) を定義しても内積の公理を満たさない．例を挙げよ.
（ここでも $\mathbb{C}^2$ に $\|(z, w)\| = |z| + |w|$ というノルムを入れた空間を考えましょう．$u = (1, 0) \in \mathbb{C}^2$, $v = (1, 1) \in \mathbb{C}^2$ としたときに (u, v) と $(2u, v)$ を計算すると？）

[**39**] $(H, \|\cdot\|)$ を Banach 空間とし，中線定理（[**37**](1)）を満たすと仮定する．このとき，写像 $(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$ を [**37**](2) のように定めると，$(\cdot, \cdot)$ は H 上の内積となっていることを示せ.（即ち H は Hilbert 空間となる[1]）

[**40**] A を内積空間 H の部分集合とする．このとき次を示せ.

(1) $A^{\perp}$ は H の閉部分空間.　　(2) $A \cap A^{\perp} \subset \{0\}$.

（裏に続く）

[1] これより，Banach 空間が Hilbert 空間であるための必要十分条件は，ノルムに関して中線定理が成り立つことである，ということがわかります．また，この問題では完備性は用いないので,「Banach 空間」を「ノルム空間」に,「Hilbert 空間」を「内積空間」に変えても成立します.

[**41**] M を Hilbert 空間 H の閉部分空間とする．このとき次を示せ．

(1) $\left(M^{\perp}\right)^{\perp}=M$．（←下に注意あり[2]）

(2) 任意の $u \in H$ に対し $\|u\|^2=\|P_M u\|^2+\|u-P_M u\|^2$．（←これも下に注意あり[3]）

(3) $u \in M \Longleftrightarrow P_M u=u \Longleftrightarrow \|P_M u\|=\|u\|$．

[**42**] (1) M, N を Hilbert 空間 H の部分空間で，次を満たすと仮定する．

(i) 任意の $u_1 \in M$ と $u_2 \in N$ に対し $u_1 \perp u_2$．
(ii) 任意の $u \in H$ は $u=u_1+u_2$ $(u_1 \in M, u_2 \in N)$ と表される．

このとき，M, N は H の閉部分空間であり，$N=M^{\perp}$, $M=N^{\perp}$ であることを示せ．

(2) $H=L^2(\mathbb{R})$ とする．H の部分空間 M, N を

$$\begin{aligned} M&=\{f \in H \mid f(x)=f(-x) \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}\} \quad \text{（即ち偶関数全体）}, \\ N&=\{f \in H \mid f(x)=-f(-x) \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}\} \quad \text{（即ち奇関数全体）} \end{aligned}$$

とおくと，$N=M^{\perp}$ であり，$\left(P_M f\right)(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ $(f \in H)$ であることを示せ．
（ヒント：(1) を用いる）

[**43**] I を開区間 $(-1,1)$ とし，$H=L^2(I)$ とおく．次の M に対して $M^{\perp}$ と P_M を求めよ．

(1) $M=\{f \in H \mid \exists c \in \mathbb{C} \text{ s.t. } f(x)=c \ \text{ a.e. } x \in I\}$

(2) $M=\left\{f \in H \,\middle|\, \displaystyle\int_{-1}^{1} x f(x)\, dx=0\right\}$

[**44**] M を Hilbert 空間 H の閉部分空間とする．このとき $u \in H$ に対して

$$\max_{v \in M,\, \|v\|=1} |(u, v)|=\|P_M u\|$$

が成り立つことを示せ.（ヒント：直交分解）

---

[2] **［注意］** M が単に部分集合のときは不成立です．例えば $\mathbb{C}^2$ で $M=\{(1,0)\}$ として $\left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ を求めてみましょう．なお，M が単に部分空間であれば $\left(M^{\perp}\right)^{\perp}=\overline{M}$ が成立します．これも証明してみましょう．

[3] **［注意］** $u=u_1+u_2$, $u_1 \perp u_2$ ならば $\|u\|^2=\|u_1\|^2+\|u_2\|^2$ を示せば良いですね．これは Pythagoras（ピタゴラス）の定理の拡張です．