数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.5　　（2024.4.23 出題）

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります．

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを後日レポート問題に指定するかもしれません．

[31] $X = L^2(-1,1)$ とし，X の部分空間 $Y = \{f : (-1,1) \to \mathbb{C},\ f(x) = px + q \mid p, q \in \mathbb{C}\}$（即ち，$Y$ は区間 $(-1,1)$ 上の一次関数全体）を考える．

(1) Y は X の閉部分空間であることを示せ．
（定義通りに示す必要はありません．今日の講義で学んだ性質を使えばあっという間に示せます．）

(2) $g(x) = x^2$ とおく．商空間 X/Y におけるノルム $\big\|[g]\big\|$ を求めよ．

[32] ℓ^∞ の部分集合 X を

$$X = \left\{ (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} a_n \text{ が存在する} \right\}$$

と定める．X は ℓ^∞ の閉部分空間であることを示せ[1]．

[33] 前問で定義された X は ℓ^∞ のノルムで Banach 空間となる．次に，X の部分集合 Y を

$$Y = \left\{ (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}$$

と定める．

(1) Y は X の閉部分空間であることを示せ．

(2) (1) より，商空間 X/Y は Banach 空間となるが，どのような空間（と<u>ノルムを含めて</u>同型）であるかを具体的に記述せよ．

（裏に続く）

[1] 演習問題 No.1 **[2]**(1) の結果があるので，残りは X が閉集合であることを示せば良い……とお思いかもしれませんが，もう一つ大事なことがあります（ほぼ自明なことですが，言及の必要はあります）．

[34] 本日の講義で，次の**補題**を証明した．

> **補題．** X を Banach 空間，Y を X の閉部分空間で $X \neq Y$ とする．このとき，任意の $c \in (0,1)$ に対し，ある $u \in X$ が存在し，$\|u\| = 1$ かつ $\big\|[u]\big\| > c$ となる．

(1) X が有限次元線形空間ならば（従って Y も有限次元），$\|u\| = 1$ かつ $\big\|[u]\big\| = 1$ となる u が存在することを示せ．

(2) X が Hilbert 空間ならば，$\|u\| = 1$ かつ $\big\|[u]\big\| = 1$ となる u が存在することを示せ．（Hilbert 空間の定義については次回の講義で扱います）

(3) 「$\|u\| = 1$ かつ $\big\|[u]\big\| = 1$」となる $u \in X$ が存在しないような X, Y の例を挙げよ．

[35] 線形空間 $X = C([-1,1])$ の元 f のノルムを $\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ と定義する．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対し，$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (-1 \leq x < 0) \\ nx & \left(0 \leq x < \dfrac{1}{n}\right) \\ 1 & \left(\dfrac{1}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$ とおく．関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は X の Cauchy 列であることを示せ．

(2) (1) で定義された $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は X の中に極限を持たないこと，即ち $(X, \|\cdot\|_2)$ は完備ではない（従って Banach 空間ではない）ことを示せ．

（同様にして $C_0(\mathbb{R}^N)$ に $\|\cdot\|_2$ というノルムを入れた空間や，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域としたとき $C(\overline{\Omega})$ に $\|\cdot\|_2$ というノルムを入れた空間も完備ではありません）