数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.4　　（2024.4.18 出題）

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを後日レポート問題に指定するかもしれません.

[22] $1 \le p < \infty$ とする．任意の $f \in L^p(\mathbb{R})$ に対して，次の式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx = 0.$$

（まずは $f \in C_0(\mathbb{R})$ の場合に示せ．そして $C_0(\mathbb{R})$ が $L^p(\mathbb{R})$ において稠密であることを用いる.）

[23] $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合とする．$(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間であることを証明せよ.

[24] 今週の講義で次の**定理**を証明した.

> **定理.**　$1 \le p < \infty$ のとき，$C_0(\mathbb{R}^N)$ は $L^p(\mathbb{R}^N)$ で稠密である.
> 即ち，$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^N), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in C_0(\mathbb{R}^N)$ s.t. $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

この**定理**は $p = \infty$ のときは**成り立たない**ことを示せ.

[25] (1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を Lebesgue 測度が有限な可測集合とする．このとき，任意の $p \in [1, \infty)$ に対して $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ を示せ[1].

(2) Ω の Lebesgue 測度が ∞ のときには，$L^\infty(\Omega)$ と $L^p(\Omega)$ には包含関係はない．以下，I を開区間 $(0, \infty)$ として，次のおのおのについて，条件を満たす関数 f の例を挙げよ.

(i) 任意の $p \in [1, \infty)$ に対して $f \in L^p(I)$ であるが，$f \notin L^\infty(I)$ である関数 f.

(ii) $f \in L^\infty(I)$ であるが，任意の $p \in [1, \infty)$ に対して $f \notin L^p(I)$ である関数 f.
（こちらの方が (i) より簡単です）

[26] $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を Lebesgue 測度が有限な可測集合とし，$f \in L^\infty(\Omega)$ とする（すると **[25]**(1) の結果より，任意の $p \in [1, \infty)$ に対して $f \in L^p(\Omega)$ である）．このとき，次を示せ[2].

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

（裏に続く）

[1] また，演習問題 **[17]**(1) の結果と合わせると，Ω が測度有限な可測集合ならば，任意の $1 \le q \le p \le \infty$ に対して $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ であることが言えます.

[2] Lebesgue 積分に不慣れな方は，次の問題で考えていただいても構いません：

問題：f を有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数とするとき，次を示せ.

$$\lim_{p \to \infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

両者の証明は本質的にはほとんど変わりません．なお，**[25]**(2)(ii) の結果より，「Ω の Lebesgue 測度が有限」という仮定がないと反例があります.

[27] (1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合とし，$f \in L^\infty(\Omega)$ とする．このとき，$|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ a.e. $x \in \Omega$ であることを示せ[3].

(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とし，$f \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ とする．このとき，

- $|f(x)| \leq M$ a.e. $x \in \Omega \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} |f(x)| \leq M \ (\forall x \in \Omega)$,
- $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$

が成り立つことを示せ.

[28] $p \in [1, \infty)$ に対し，$\ell^p = \left\{ (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < \infty \right\}$ とおく．$a = (a_n) \in \ell^p$ に対して $\|a\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p \right)^{1/p}$ とおくと，$(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ は Banach 空間となる.

(1) $\ell^1 \subset \ell^2$ を示せ[4].

(2) ℓ^1 は，ノルム $\|\cdot\|_{\ell^2}$ に関して ℓ^2 の閉部分空間であるか？

[29] (1) $p \in [1, \infty)$ とし，Banach 空間 ℓ^p を考える.

(i) $X_1 = \left\{ (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > N \implies a_n = 0 \right\}$ とおく．X_1 は ℓ^p において稠密であることを示せ.

(ii) $X_2 = \{ (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} \mid$ 次の 2 つを同時に満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在する：

① $n > N \implies a_n = 0$.

② $1 \leq n \leq N \implies \mathrm{Re}\, a_n \in \mathbb{Q}$ かつ $\mathrm{Im}\, a_n \in \mathbb{Q}$. $\}$

とおくと，X_2 は ℓ^p において稠密であることを示せ.

(iii) ℓ^p は可分であることを示せ[5].

(2) ℓ^∞ は可分ではないことを示せ[6].

（ヒント：各項が 0 または 1 であるような数列全体を考えてみよ）

[30] $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ をそれぞれ Banach 空間とする.

(1) 直積線形空間 $X \times Y$ の元 (x, y) に対し，$\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ と定義すると，これはノルムとなっていて，このノルムの下で $X \times Y$ は Banach 空間であることを示せ.

(2) $(x, y) \in X \times Y$ のノルムを $|(x, y)| = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}$ と定義すると，$\|\cdot\|$ と $|\cdot|$ は $X \times Y$ 上の同値なノルムであることを示せ．従って $(X \times Y, |\cdot|)$ も Banach 空間となる.

---

[3] 講義では $f \in L^\infty(\Omega)$ に対して $\|f\|_\infty := \inf\{M \geq 0 \mid |f(x)| \leq M \text{ a.e. } x \in \Omega\}$ と定義しました．この問題は，$f \in L^\infty(\Omega)$ ならば inf が実は min であることを示せ，という問題です.

[4] 実は「$1 \leq q \leq p \leq \infty$ ならば $\ell^q \subset \ell^p$」が成立します．このことと表面にある脚注 1 とを比べてみましょう.

[5] 示すべきことは X_2 が可算集合であることです．また，実は $p \in [1, \infty)$ ならば $L^p(\mathbb{R}^N)$ も可分です.

[6] $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ が可分ではないことも，似たような方法で証明できます.