数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.3　（2024.4.16 出題）

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを後日レポート問題に指定するかもしれません.

[15] $1 \leq p < \infty$ を定数とする.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ とおく.

(i) $f \in L^p((0,1])$ となる実数 α の範囲を求めよ.

(ii) $f \in L^p([1,\infty))$ となる実数 α の範囲を求めよ.

(2) $g(x) = \dfrac{1}{1+|x|^\alpha}$ とおく．$g \in L^p(\mathbb{R})$ となる実数 α の範囲を求めよ.
（分かりにくければ，まずは $p = 1$ の場合に考えてみよう）

(3) $h(x,y) = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha}$ とおく．$h \in L^p(\mathbb{R}^2)$ となる実数 α の範囲を求めよ.

（では $\mathbb{R}^N$ 上の関数 $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+|x|^\alpha}$（ただし $x = (x_1,\ldots,x_N)$ に対して $|x| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_N^2}$）を考えるとき，$\varphi \in L^p(\mathbb{R}^N)$ となる実数 α の範囲はどうなるであろうか？）

[16] $1 \leq p < \infty$ とし，q を $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$ を満たす実数とする.

(1) $\alpha,\beta \geq 0$ ならば，$(\alpha+\beta)^p \leq 2^{p-1}(\alpha^p+\beta^p)$ が成立することを示せ.

(2) $\alpha,\beta \geq 0$ ならば，$\alpha\beta \leq \dfrac{\alpha^p}{p}+\dfrac{\beta^q}{q}$ が成立することを示せ.

[17]（超重要！） 有界開区間 (a,b) を I とおく.

(1) $L^2(I) \subset L^1(I)$ を示せ．より一般に，測度が有限な可測集合 Ω と，定数 $1 \leq q \leq p < \infty$ に対して $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ であることが示せる.（ヒント：Hölder の不等式）

(2) 「任意の $f \in L^2(I)$ に対して $\|f\|_1 \leq c\|f\|_2$」を満たす最小の定数 c の値を求めよ.

(3) ここでは $I = (0,1)$ とする．$f \in L^1(I)$ だが $f \notin L^2(I)$ となる関数 $f : I \to \mathbb{C}$ の例を挙げよ[1]（従って，$L^1(I) \not\subset L^2(I)$ である）.

(4) 一方，$L^1(\mathbb{R})$ と $L^2(\mathbb{R})$ には包含関係はないこと，即ち $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ および $L^2(\mathbb{R}) \not\supset L^1(\mathbb{R})$ であることを示せ[2].

（裏に続く）

[1]即ち，$L^2(I)$ は $L^1(I)$ の真部分集合です.

[2]一般に，Ω の測度が ∞ の場合には $L^p(\Omega)$ と $L^q(\Omega)$ $(1 \leq q < p < \infty)$ の間に包含関係はありません．これと (1) の結果とを比べてください.

[18] 可測集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ に対し，$\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p\,dx < \infty$ を満たす可測関数全体を $L^p(\Omega)$ とし，$f \in L^p(\Omega)$ に対し，$\|f\|_p := \left(\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$ と定めると，$1 \le p < \infty$ のときに $\|\cdot\|_p$ が $L^p(\Omega)$ 上のノルムであることを今日の講義で示した．

さて，$0 < p < 1$ の時にも上と同様に定義したいところだが，残念ながら $0 < p < 1$ ならば $\|\cdot\|_p$ は $L^p(\Omega)$ のノルムとはならない．このことを Ω が $\mathbb{R}$ の開区間 $(-1, 1)$ の場合に証明せよ．（ノルムの定義のうちどれが成り立たないのであろうか？）

[19] $p \in [1, \infty)$ を定数とし，(2) では $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合とする．

(1) $\alpha, \beta \ge 0$ のときに $|\alpha^p - \beta^p| \le p(\alpha^{p-1} + \beta^{p-1})|\alpha - \beta|$ が成立することを示せ[3]．

(2) $f_n \in L^p(\Omega)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $f \in L^p(\Omega)$ とする．もし関数列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ が f に L^p-ノルムで収束しているならば，関数列 $\big(|f_n|^p\big)_{n=1}^\infty$ は $|f|^p$ に L^1-ノルムで収束していることを示せ．

[20] X をノルム空間，$(u_n)_{n=1}^\infty$ を X の Cauchy 列とする．

いま，$(u_n)_{n=1}^\infty$ のある部分列 $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$ が存在して，$(u_{n_k})_{k=1}^\infty$ が $u \in X$ に収束していると仮定する．このとき，元の点列 $(u_n)_{n=1}^\infty$ 自身が u に収束していることを示せ．

[21] $p \in [1, \infty)$ を定数とする．次の 3 つの条件を**すべて**満たす関数列 (f_n) の例を挙げよ．

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f_n : [0, 1] \to \mathbb{C}$ は可測関数．

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = 0$．（即ち (f_n) は恒等的に 0 である関数に L^p-ノルムで収束している）

(iii) **任意の $\boldsymbol{x \in [0, 1]}$ に対して，**$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ とは**ならない**．
（即ち (f_n) は $\boldsymbol{[0, 1]}$ **内のすべての点で** 0 に収束していない）

（ただし，今日の講義で証明した定理により，(f_n) の部分列をうまく選べばほとんどいたるところ 0 に収束するようにできるはずである）

[3] p は自然数であるとは限らないことに注意しましょう．p が自然数でなければ $\alpha^p - \beta^p$ を「因数分解」することはできません！