数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.2　　（2024.4.11 出題）

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを後日レポート問題に指定するかもしれません.

[9] $X = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{C}\ (\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する $\}$ と定義すると，**[2]**(1) の結果によって X は $\mathbb{C}$ 上の線形空間となる.

$(a_n)_{n=1}^{\infty} \in X$ に対して $\left\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ と定めると，$\|\cdot\|$ は X 上のノルムであることを示せ.

[10] $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．1 点 $x \in X$ と部分集合 $A \subset X$ に対して $\mathrm{dist}\,(x, A) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in A\}$ と定義する.

(1) A が閉集合であると仮定する．このとき，$\mathrm{dist}\,(x, A) = 0 \iff x \in A$ を示せ.

(2) F を X の閉集合，G を X の開集合とし，$F \subset G$ と仮定する．このとき，連続関数 $h : X \to [0, 1]$ で，F 上では恒等的に 1，G^c 上では恒等的に 0 を値にもつものが存在することを示せ.

（ヒント：$h(x) = \dfrac{\mathrm{dist}\,(x, G^c)}{\mathrm{dist}\,(x, F) + \mathrm{dist}\,(x, G^c)}$ とすると……でも証明の際は細かい点まで注意しよう）

[11] X を**有限次元**線形空間とし，$e_1, e_2, \ldots, e_k$ を X の基底とする.

すると，任意の $u \in X$ に対して

$$u = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ke_k \quad (c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{C})$$

と一意的に表すことができる．このとき，$\|u\| = \max_{i=1,\ldots,k} |c_i|$ と定義する.

(1) $\|\cdot\|$ は X 上のノルムであることを示せ.

(2) $(X, \|\cdot\|)$ は Banach 空間であることを示せ[1].

[12] 関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ に対して $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x)|$ とおく.

(1) ノルム空間 $(C_\infty(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間で**ある**ことを示せ.

(2) ノルム空間 $(C_0(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間では**ない**ことを示せ.

（裏に続く）

[1] 勿論，$\mathbb{C}$ が完備であることは用いて良いです．任意に X の Cauchy 列 $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ を取って，$u_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \cdots + c_{nk}e_k$ と表したときに，まずは各 $j = 1, \ldots, k$ に対して複素数列 $(c_{nj})_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることを示します.

[13] (1) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ とし，Ω 上で有界かつ C^1 級な関数 $f(x,y)$ 全体の集合を X とおく．$f \in X$ に対して $\|f\| = \sup_{(x,y)\in\Omega} |f(x,y)|$ と定義する．

(i) $\|\cdot\|$ は X 上のノルムであることを示せ．

(ii) $(X, \|\cdot\|)$ は Banach 空間では**ない**ことを示せ[2]．

(2) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|<1\}$ とし，D 上で有界かつ正則な関数 $f(z)$ 全体の集合を Y とおく．$f \in Y$ に対して $\|f\| = \sup_{z\in D} |f(z)|$ と定義する．

(i) $\|\cdot\|$ は Y 上のノルムであることを示せ．（$\leftarrow$ (1)(i) とほぼ同じですが……）

(ii) $(Y, \|\cdot\|)$ は Banach 空間で**ある**ことを示せ[3]．

（ヒント：Cauchy の積分公式から導かれる，$f'(z)$ に関する「Cauchy の評価式」を用います）

[14] $I \subset \mathbb{R}$ を区間，$\alpha \in (0,1]$ とする．$f \in C(I)$ が次の条件を満たすとき，I 上で **α-Hölder 連続**であると呼ぶ[4]．

ある正定数 L が存在して，$|f(x)-f(y)| \le L|x-y|^\alpha$ $(\forall x, y \in I)$ が成立する．

(1) $f(x) = |x|^\gamma$ が区間 $(-1,1)$ 上で α-Hölder 連続となるような正定数 γ の範囲を求めよ．

(2) 区間 I 上で有界かつ α-Hölder 連続な関数全体の集合を $C^\alpha(I)$ と書き，$f \in C^\alpha(I)$ に対して $\|f\|_{C^\alpha(I)} = \sup_{x\in I} |f(x)| + \sup_{x,y\in I,\, x\neq y} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$ とおく．

(i) $\|\cdot\|_{C^\alpha(I)}$ は $C^\alpha(I)$ 上のノルムであることを示せ．

(ii) $(C^\alpha(I), \|\cdot\|_{C^\alpha(I)})$ は Banach 空間であることを示せ．

---

[2] 講義で述べたように，$f(x,y)$, $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ がすべて Ω 上で有界である C^1 級関数 $f(x,y)$ 全体の集合を $\mathcal{B}^1(\Omega)$ とすると，$\|f\|_{\mathcal{B}^1} := \sup_{(x,y)\in\Omega} |f(x,y)| + \sup_{(x,y)\in\Omega} |f_x(x,y)| + \sup_{(x,y)\in\Omega} |f_y(x,y)|$ というノルムのもとで $\mathcal{B}^1(\Omega)$ は Banach 空間となります．

[3] これを (1) の結果と見比べましょう．「複素微分可能」という性質は「実 2 変数関数として微分可能」とは異なる（ずっと強い）ことがわかります．

[4] 特に，$\alpha = 1$ のときは **Lipschitz 連続**であると呼ばれます．