数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.13　（2024.5.23 出題）

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません.

[86] 今日の講義で学習した「反射的 Banach 空間の閉単位球は弱点列コンパクトである」という定理は,「反射的」という仮定を外すと一般に成り立たない．それを実際に確認しよう.

$X = L^1(\mathbb{R})$ とおく（X は反射的ではない）．$n \in \mathbb{N}$ に対し $I_n = [n, n+1]$ とおき，$f_n(x) = \chi_{I_n}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in I_n) \\ 0 & (x \notin I_n) \end{cases}$ とおく.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$f_n \in X$ であり，$\|f_n\|_1 = 1$ であることを示せ.

(2) $(f_n)_{n=1}^\infty \subset X$ のある部分列 $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ が $f \in X$ に弱収束すると仮定する．すると，任意の有界な可測集合 $E \subset \mathbb{R}$ に対して，$\chi_E \in L^\infty(\mathbb{R}) = (L^1(\mathbb{R}))^*$ であるから

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) f_{n_k}(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) f(x)\,dx \qquad (k \to \infty)$$

が成立する．これを用いて $f = 0$ a.e. を示せ.

(3) 一方，$g(x) = 1$ とおくと $g \in L^\infty(\mathbb{R}) = (L^1(\mathbb{R}))^*$ であるから

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) f_{n_k}(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\,dx \qquad (k \to \infty)$$

が成立しているはずである．しかし (2) の結果を考えるとこれは矛盾であることを示せ（ヒント：(2) の結果から $\to$ の右側は 0 になります．では $\to$ の左側は？）．従って，(f_n) は X の閉単位球に属する点列であるが，(f_n) には弱収束する部分列は存在しないことがわかった.

[87] 数列空間 ℓ^∞ の閉単位球は弱点列コンパクトであるか否かを，理由を付けて答えよ.

[88]（反射的 Banach 空間の弱完備性） X を反射的 Banach 空間，$(u_n)_{n=1}^\infty \subset X$ とする．いま，任意の $\varphi \in X^*$ に対して $\big(\varphi(u_n)\big)_{n=1}^\infty$ が（$\mathbb{C}$ の）Cauchy 列をなすならば，ある $u \in X$ が存在して $\operatorname{w-}\lim_{n\to\infty} u_n = u$ であることを示せ.

[89] $\big(x^{(k)}\big)_{k=1}^\infty$ を ℓ^1 の点列，$x \in \ell^1$ とする．いま，$\operatorname{w-}\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ が成立するならば，$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ であることを示せ.

[90] X, Y を Banach 空間，$T : X \to Y$ を $D(T) = X$ を満たす線形作用素とする．このとき，T がコンパクト作用素であれば $T \in B(X, Y)$ であることを示せ.

（裏に続く）

[91] X, Y, Z を Banach 空間，$T, S \in B(X, Y)$, $R \in B(Y, Z)$ とするとき，次を示せ．ただし，$RT : X \to Z$ は $(RT)(u) = R(T(u))$ $(u \in X)$ で定まる作用素とする．

(1) T がコンパクト作用素ならば，RT もコンパクト作用素．

(2) R がコンパクト作用素ならば，RT もコンパクト作用素．

(3) T, S が共にコンパクト作用素ならば，$T + S$ もコンパクト作用素．

[92] X, Y を Banach 空間とし，$T : X \to Y$ はコンパクト作用素であるとする．このとき，T の値域 TX の閉包 $\overline{TX}$ は可分であることを示せ．

[93] X, Y を Banach 空間，$T : X \to Y$ を線形作用素とする．次を示せ．

(1) T がコンパクト作用素ならば，次の $(*)$ が成立する：

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ in } X \implies Tu_n \to Tu \ \text{ in } Y. \tag{$*$}$$

(2) X が反射的であるとする．T が $(*)$ を満たすならば，T はコンパクト作用素である．

(3) $X = Y$ かつ X が Hilbert 空間であるとする．このとき，次の三つは同値である．
(i) T はコンパクト作用素．　(ii) T は $(*)$ を満たす．
(iii) finite rank をもつ作用素列 $(T_n) \subset B(X)$ を用いて $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ と書ける．

[94] (1) $H = L^2(0, 2\pi)$ とおき，$g \in L^1(0, 2\pi)$ とする．作用素 $T : H \to H$ を $Tf = g * f$ で定める．このとき T はコンパクト作用素であることを示せ．

(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を可測集合とし，$H = L^2(\Omega)$ とおく．また, $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ とする．作用素 $T : H \to H$ を

$$(Tf)(x) = \int_\Omega K(x, y) f(y)\, dy$$

で定める．このとき T はコンパクト作用素であることを示せ．
（ヒント：**[93]** の $(*)$ を確かめる）

☆ Ascoli-Arzelà の定理

Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界開集合，(f_m) を $\overline{\Omega}$ 上の関数列とする[1]．

定義． (f_m) が $\overline{\Omega}$ 上で**一様有界**である $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists C > 0$ s.t. $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \overline{\Omega}, |f_m(x)| \le C.$

定義． (f_m) が $\overline{\Omega}$ 上で**同程度連続**である
$\overset{\text{def}}{\iff}$ 「$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x, x' \in \overline{\Omega} \left(|x - x'| < \delta \implies |f_m(x) - f_m(x')| < \varepsilon \right)$.」

定理．(Ascoli-Arzelà)
Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界開集合とする．$\overline{\Omega}$ 上の関数列 (f_m) が $\overline{\Omega}$ 上で一様有界かつ同程度連続ならば，(f_m) は $\overline{\Omega}$ 上で一様収束する部分列を含む．

[1] コンパクト距離空間上の関数列に対しても同様の結果が成立します．