数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.12　（2024.5.21 出題）

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません.

[**77**] X を Banach 空間とする．次を示せ.

(1) X が反射的であることと，X^* が反射的であることは同値である.

(2) $X^{(1)} = X^*$, $X^{(2)} = (X^{(1)})^*, \dots, X^{(n+1)} = (X^{(n)})^*, \dots$ と定義する．このとき，次のいずれか一方のみが起こる.

(i) X は反射的（即ち，$X^{(2)} \cong X$）.
(ii) $X, X^{(2)}, X^{(4)}, \dots, X^{(2n)}, \dots$ はどの二つも同型ではない.

[**78**] X を Banach 空間とし（実はノルム空間で十分），$(u_n) \subset X$ が弱収束すると仮定する．このとき，弱極限（$\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ を満たす $u \in X$）はただ一つであることを証明せよ.

[**79**] X を Banach 空間とする．次を示せ.

(1) $(u_n) \subset X$ が $u \in X$ に弱収束するならば，(u_n) は有界点列であり $\|u\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|$.

(2) (u_n) の一次結合で書ける元全体からなる X の部分空間を L とし，L の閉包を M とする（従って M は閉部分空間）．もし $(u_n) \subset X$ が $u \in X$ に弱収束するならば，$u \in M$.
（ヒント：演習問題 No.11 [**74**]）

(3) $(\varphi_n) \subset X^*$ が $\varphi \in X^*$ に汎弱収束するならば，(φ_n) は有界点列であり $\|\varphi\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n\|$.

[**80**] $H = L^2(0, 2\pi)$ とおく．$n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n(x) = e^{inx}$ とおくとき，H の点列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ の弱極限 $\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ を求めよ.

なお，この問題では Fourier 級数の理論，または「$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(0, 2\pi)$ の完全正規直交系である」という事実を（証明なしに）用いて良い.

[**81**] (1) X を Banach 空間とし，$(u_n)_{n=1}^\infty \subset X$, $u \in X$ とする．このとき，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ が成り立つならば，$\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ であることを示せ.
（即ち,「強収束 $\Longrightarrow$ 弱収束」ということです．念のためですが，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ とは $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$ のこと.）

(2) H を Hilbert 空間とし，$(u_n)_{n=1}^\infty \subset H$, $u \in H$ とする．このとき，$\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ かつ $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\| = \|u\|$ が成り立つならば，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ であることを示せ.

（裏に続く）

[82] 次の二つの条件を満たすような ℓ^2 上の有界線形作用素の列 $(T_m)_{m=1}^{\infty} \subset B(\ell^2)$ の例を挙げよ．ただし，$x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ の ℓ^2-ノルムを $\|x\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$ で表す.

(i) 0 でない任意の $x \in \ell^2$ に対し，$\left(\|T_m x\|_2\right)_{m=1}^{\infty}$ は 0 に収束しない.
(ii) 任意の $x \in \ell^2$ に対し，$(T_m x)_{m=1}^{\infty}$ は 0 に弱収束する.

[83] H を Hilbert 空間とし，$(T_n)_{n=1}^{\infty} \subset B(H)$ とする．いま，任意の $u \in H$ に対して $\text{w-}\lim_{n\to\infty} T_n u = 0$ であるならば，$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ であることを示せ.
（ヒント：一様有界性原理）

[84] $1 < p < \infty$ とする．Banach 空間 ℓ^p の点列 $x^{(k)} = \left(x_n^{(k)}\right)_{n=1}^{\infty}$ が 0（$= (0,0,0,\cdots)$）に弱収束するための必要十分条件は，次の二つの条件が満たされることである．このことを示せ.

(i) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|x^{(k)}\|_p < \infty$ （即ち点列 $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ は ℓ^p で有界である）
(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = 0$.

（注意：同様の命題は c_0 でも成立します.）

[85] 次の二つの条件を満たすような $L^\infty(\mathbb{R})$ の点列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ の例を挙げよ.

(i) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は 0 に汎弱収束する．（注意：$L^\infty(\mathbb{R}) = (L^1(\mathbb{R}))^*$ である）
(ii) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は 0 に弱収束**しない**.
（注意：$(L^\infty(\mathbb{R}))^* \supset L^1(\mathbb{R})$ だが，$(L^\infty(\mathbb{R}))^* \neq L^1(\mathbb{R})$ であった）