数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.11　（2024.5.16 出題）

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません.

[73] X をノルム空間とする．$u \in X$ に対し，次を示せ.

$$\|u\| = \sup_{\varphi \in X^*,\, \|\varphi\|=1} |\varphi(u)| = \sup_{\varphi \in X^*,\, \varphi \neq 0} \frac{|\varphi(u)|}{\|\varphi\|}.$$

[74] X をノルム空間とし，M を X の部分空間とする．$u \in X$ が $d = \inf_{v \in M} \|u - v\| > 0$ を満たすとき，次の三つの条件を満たす $\varphi \in X^*$ が存在することを示せ.

(i) $\varphi(v) = 0\ (\forall v \in M)$.　　(ii) $\varphi(u) = 1$.　　(iii) $\|\varphi\| = \dfrac{1}{d}$.

[75]（Minkowski functional） X をノルム空間とし，K を X の凸部分集合で 0 を内点に含むものとする．いま，$u \in X$ に対し

$$p(u) = \inf\{\alpha > 0 \mid [0, \alpha^{-1}u] \subset K\}$$

と定義する．ただし $[u, v] = \{(1-t)u + tv \mid t \in [0,1]\}$ と定める．このとき，以下を示せ.

(1) $0 \leq p(u) < \infty\ (\forall u \in X)$.

(2) $p(u+v) \leq p(u) + p(v),\ \ p(cu) = cp(u)\ (\forall u, v \in X,\ \forall c > 0)$.

(3) u が K の内点 $\Longrightarrow p(u) < 1$.

(4) u が K の外点 $\Longrightarrow p(u) > 1$.

(5) $\exists c > 0$ s.t. $\forall u \in X,\ p(u) \leq c\|u\|$.

[76] X を $\mathbb{C}$-線形空間とする．関数 $p_1 : X \to \mathbb{R},\ p_2 : X \to \mathbb{R}$ が次を満たすと仮定する.

(i) $p_j(u) \geq 0\ (\forall j \in \{1,2\},\ \forall u \in X)$
(ii) $p_j(u+v) \leq p_j(u) + p_j(v)\ (\forall j \in \{1,2\},\ \forall u, v \in X)$
(iii) $p_j(cu) = |c| p_j(u)\ (\forall j \in \{1,2\},\ \forall c \in \mathbb{C},\ \forall u \in X)$

さらに，$\mathbb{C}$-線形な関数 $\varphi : X \to \mathbb{C}$ が存在して，$|\varphi(u)| \leq p_1(u) + p_2(u)\ (\forall u \in X)$ が成り立つと仮定する．このとき，ある $\mathbb{C}$-線形な関数 $\varphi_1 : X \to \mathbb{C},\ \varphi_2 : X \to \mathbb{C}$ が存在して，$|\varphi_j(u)| \leq p_j(u)\ (\forall j \in \{1,2\},\ \forall u \in X)$ かつ $\varphi(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)\ (\forall u \in X)$ となることを証明せよ.