数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.10　（2024.5.14 出題）

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを期末試験で出題するかもしれません.

[67] X を複素ノルム空間とする.（有界とは限らない）線形汎関数 $\varphi : X \to \mathbb{C}$ に対して，$N(\varphi) = \{u \in X \mid \varphi(u) = 0\}$ と定義する.

(1) $N(\varphi) \neq X$ とし，$u_0 \notin N(\varphi)$ を取る．このとき，任意の $u \in X$ は $u = cu_0 + v$（ただし $c \in \mathbb{C}, v \in N(\varphi)$）の形に一意的に表せることを示せ.

(2) $Y (\neq X)$ を X の部分空間とし，$u_0 \notin Y$ を取る．いま，任意の $u \in X$ が $u = cu_0 + v$（ただし $c \in \mathbb{C}, v \in Y$）の形に一意的に表せると仮定する．このとき，ある線形汎関数 φ が存在して $Y = N(\varphi)$ となることを示せ.

[68] φ をノルム空間 X 上の線形汎関数とし，$N(\varphi) = \{u \in X \mid \varphi(u) = 0\}$ と定義する．このとき，φ が有界線形汎関数であるための必要十分条件は，N が X の閉集合であることを示せ.

[69] 講義でやり残した，次の事実を証明せよ.

$$「\varphi \in (\ell^1)^* \implies \exists y = (y_n) \in \ell^\infty \text{ s.t. } \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad (\forall x = (x_n) \in \ell^1).」$$

[70] X を Banach 空間とする．Y を X の部分空間とするとき，

$$Y^\perp := \{\varphi \in X^* \mid \varphi(v) = 0 \ \ (\forall v \in Y)\}$$

と定義する．さらに，Z を X^* の部分空間とするとき，

$$Z^\perp := \{u \in X \mid \varphi(u) = 0 \ \ (\forall \varphi \in Z)\}$$

と定義する．このとき，次を示せ．ただし $\overline{Y}$ は Y の閉包である.

(1) $Y^\perp$ は X^* の部分空間である.　　(2) $\left(Y^\perp\right)^\perp = \overline{Y}$.

(3) Y が X の閉部分空間であれば，Y^* と $X^*/Y^\perp$ は同型である.

[71] X を複素ノルム空間とする．このとき，次を示せ.

(1) Y を X の部分空間とし，$\varphi \in Y^*$ とする．このとき，$\Phi \in X^*$ で次の 2 つの条件をみたすものが存在する：

$$\text{(i) } \Phi(v) = \varphi(v) \ \ (\forall v \in Y), \qquad \text{(ii) } \|\Phi\| = \|\varphi\| \ (= \sup_{\|v\| \le 1, v \in Y} |\varphi(v)|).$$

(2) $u \in X$ とする．任意の $\varphi \in X^*$ に対して $\varphi(u) = 0$ ならば，$u = 0$.

(3) $u, v \in X$ とする．$u \neq v$ ならば，$\varphi(u) \neq \varphi(v)$ となる $\varphi \in X^*$ が存在する.

[72] X をノルム空間とし，X_0 を X で稠密な部分空間とする．このとき，X^* と X_0^* は Banach 空間として同型であることを示せ.