解析学 I　レポート問題 No.4　　（2024.6.25 出題）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6Kai1.html にも置いてあります.

以下の指示に従って，レポートを提出してください.

- 裏面にある問題のうち，解けたものについてレポートにして提出してください.
- 期限・提出場所は以下の通りとします.

期限：**7 月 1 日（月） 13 時 00 分（〆切厳守）**

提出場所：**数学図書室 (A209) レポート提出ボックス，**
または Moodle 上で PDF ファイルを提出

- 紙媒体で提出する場合は，必ず A4 の用紙を使用し，2 枚以上になる場合は左上をホッチキス等でしっかり綴じてください.
- Moodle で提出する場合は，必ず PDF ファイルで提出してください．また，ファイル名を `Kai1report4_B******.pdf`（`B******` は学生番号）としてください.
  提出場所は Moodle の「講義」セクションの「第 6 回 (6/25)」にあります.
- 表紙は付けなくて結構です．学生番号・氏名をお忘れなく.
- 解けなかった問題についても,「このように考えてここまでわかったがその先がわからない」といったことや,「このように考えたが解くことができなかった」といったことを書いてくれれば，内容に応じて評価します.
- ただし，レポートの体をなさないものは不提出扱いとします．また，他人のレポートをほぼ丸写ししたと思われるものは（写したレポート，写されたレポート双方を）不提出扱いとし，**さらに大幅な減点とします**.
- レポートは添削した後返却します.

$\boxed{\text{問 1}}$ 指示に従い，**どちらか一方のみ**を解答せよ．

● **学生番号が偶数の学生**　数列 $\{a_n\}$ は，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geq 0$ を満たすとする．

(1) $x, y \in \mathbb{R}$ とする．$0 \leq y \leq x$ ならば $\sqrt{x-y} \geq \sqrt{x} - \sqrt{y}$ が成り立つことを示せ．

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，$\alpha \geq 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$ であることを示せ．
（注意：後者の証明の際に (1) の結果を用いても用いなくてもどちらでも良い）

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \infty$ であることを示せ．

● **学生番号が奇数の学生**　6/25 の講義で，実数列に対して収束することとコーシー列であることが同値であると示す．しかし，以下の問題では**この事実を用いずに**解答せよ．

(1) **コーシー列の定義に従って**，$\{a_n\}, \{b_n\}$ がともにコーシー列ならば $\{a_n - b_n\}$ もコーシー列であることを示せ．

(2) **コーシー列の定義に従って**，$\{a_n\}$ がコーシー列ならば $\{a_n\}$ は有界であることを示せ．

(3) **コーシー列の定義に従って**，$\{a_n\}, \{b_n\}$ がともにコーシー列ならば $\{a_n b_n\}$ もコーシー列であることを示せ．（(3) の証明の際に，(2) の結果を用いても良い）

$\boxed{\text{問 2}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ の和を求めよ．（第 n 部分和を計算し，その極限を求めよ）

$\boxed{\text{問 3}}$ 次の級数の収束・発散について調べよ．ただし，(3) では α を正定数とする．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n + 4}$.　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^4+1)^{\alpha}}$.

（注意：(3) では α の値によって場合分けが必要である）

$\boxed{\text{問 4}}$ すべての自然数の逆数の和が発散する（即ち $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$）ことを講義で学ぶ．

では，すべての**正の奇数**の逆数の和が収束するか発散するかを，理由を付けて答えよ．

（即ち，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$ は収束するか，それとも発散するか？）

$\boxed{\text{問 5}}$ **（希望者のみ）** 自然数のうち，2 と 8 がどの桁にも現れないものを考え，それらを小さい方から順に並べた数列

$$1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 30, 31, 33, \cdots$$

を $\{a_n\}$ とする．このとき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots$ が収束するか発散するかを理由を付けて答えよ[1]．

[1] この問題は平成 22 年度の広島大学理学部数学科の後期日程の入試問題を大学生向けにアレンジしたものです．ただし，レポートでは厳密な議論で解答してください．