解析学 I　レポート問題 No.3

（2024.6.18 出題）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6Kai1.html にも置いてあります.

以下の指示に従って，レポートを提出してください.

- 下部と裏面にある問題のうち，解けたものについてレポートにして提出してください.
- 期限・提出場所は以下の通りとします.

期限：**6 月 24 日（月） 13 時 00 分（〆切厳守）**

提出場所：**数学図書室 (A209) レポート提出ボックス，**
または Moodle 上で PDF ファイルを提出

- 紙媒体で提出する場合は，必ず A4 の用紙を使用し，2 枚以上になる場合は左上をホッチキス等でしっかり綴じてください.
- Moodle で提出する場合は，必ず PDF ファイルで提出してください．また，ファイル名を `Kai1report3_B******.pdf`（`B******` は学生番号）としてください.
提出場所は Moodle の「講義」セクションの「第 4 回 (6/18)」にあります.
- 表紙は付けなくて結構です．学生番号・氏名をお忘れなく.
- その他の注意事項はこれまでと同様です.

問 1（皆さんが高校の数学の先生になったと仮定してこの問題を解いてください）

「$a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ」という問題に対して，ある高校生が次のような解答をした.

> すべての自然数 n について $-1 \leqq \cos n \leqq 1$ であることにより
> $$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\cos n}{n} \leqq \frac{1}{n}$$
> が成り立つので，
> $$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$
> である．ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ であるから，$0 \leqq \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} \leqq 0$ であり，
> 従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} = 0$ である.

もしこの解答に何か問題点があると思えばそれを指摘し[1]，修正した解答を書け．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ や $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ は既知とする（従って，それを問題点とはしない）[2].

---

[1]将来は高校の数学の先生になりたい！という方は，実際に高校生に説明するような口調で書いていただいても構いません.

[2]また,「数列の極限は ε-N 論法を使って答案を書かないと厳密でないからダメ」というご意見の方もあるとは思いますが，ほとんどの高校では ε-N 論法を使わずに数列の極限を学ぶでしょうからそこにも触れないことにします.

$\boxed{\text{問２}}$ 数列 $\{a_n\}$ が収束列であると仮定し，$c \in \mathbb{R}$ とする．このとき数列 $\{c\,a_n\}$ も収束列であり，

$$\lim_{n\to\infty}(c\,a_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{\text{問３}}$ 数列 $\{a_n\}$ を，$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2 + 6}{a_n + 3}$ $(n \in \mathbb{N})$ で定める．

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < a_n < 2$ であることを示せ．

(2) $\{a_n\}$ は収束することを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$\boxed{\text{問４}}$ 6/20 の講義で，$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明する（$\{a_n\}$ の極限値 $(= 2.718281828\cdots)$ を e と表し，**自然対数の底**と呼ぶ）．

実は，自然対数の底 e の定義には他にもいくつかの流儀がある．数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

と定義すると，$\{b_n\}$ は収束し，極限値が e であることを示そう．

> なお，この問題では次の**命題**を証明なく用いても良い（演習の**問題 2.4** を参照）．
>
> **命題** 数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ が収束し，かつある $m \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq m$ に対して $p_n \geq q_n$ が成り立つと仮定する．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n \geq \lim_{n\to\infty} q_n$ である．

(1) 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $a_m \leq b_m$ が成り立つことを示せ．
（ヒント：講義ノートにほぼ答が……）

(2) $m \in \mathbb{N}$ とする．このとき，任意の $n \geq m$ に対して

$$a_n \geq 1 + \sum_{k=1}^{m} {}_nC_k \frac{1}{n^k}$$

が成り立つことを示し，上の**命題**を用いることで $e \geq b_m$ を示せ．

(3) (1), (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{m\to\infty} b_m = e$ を示せ[3]．

[3] $\{a_n\}$ も $\{b_n\}$ もどちらも e も収束するわけですが，手計算や計算機で e の近似値を計算する際は，a_n より b_n を使う方がはるかに適しています．