解析学 I　レポート問題 No.2

（2024.6.11 出題）

プリントは `http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6Kai1.html` にも置いてあります.

以下の指示に従って，レポートを提出してください.

- 裏面にある問題のうち，解けたものについてレポートにして提出してください.
- 期限・提出場所は以下の通りとします.

期限：**6 月 17 日（月） 13 時 00 分（〆切厳守）**

提出場所：**数学図書室 (A209) レポート提出ボックス， または Moodle 上で PDF ファイルを提出**

- 紙媒体で提出する場合は，必ず A4 の用紙を使用し，2 枚以上になる場合は左上をホッチキス等でしっかり綴じてください.
- Moodle で提出する場合は，必ず PDF ファイルで提出してください．また，ファイル名を `Kai1report2_B******.pdf`（B****** は学生番号）としてください.
  提出場所は Moodle の「講義」セクションの「第 2 回 (6/11)」にあります.
- 表紙は付けなくて結構です．学生番号・氏名をお忘れなく.
- 解けなかった問題についても,「このように考えてここまでわかったがその先がわからない」といったことや,「このように考えたが解くことができなかった」といったことを書いてくれれば，内容に応じて評価します.
- ただし，レポートの体をなさないものは不提出扱いとします．また，他人のレポートをほぼ丸写ししたと思われるものは（写したレポート，写されたレポート双方を）不提出扱いとし，**さらに大幅な減点とします**.
- レポートは添削した後返却します.

問１ A, B を空でない実数の部分集合，$a \in \mathbb{R}$ とする．

(1)「任意の $x \in A$ に対して $x \leq a$ である」を満たすならば，$\sup A \leq a$ であることを示せ．

(2) B は上に有界であり，かつ $A \subset B$ であるならば，A も上に有界であり，$\sup A \leq \sup B$ であることを示せ．

問２ $A = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ の最大値・最小値・上限・下限を（存在するならば）求めよ．

（まずは，A の最大値・最小値・上限・下限を予想せよ．
そしてそのことを定義に従って，または講義で学んだ定理・命題を用いて示せ．）

問３ 数列の収束・発散の定義に従って次を示せ．

(1) $a_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ と定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) $b_n = 2024$ $(n \in \mathbb{N})$ と定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 2024$.

(3) $c_n = \dfrac{n^3}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ と定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$.

（ヒント：$\dfrac{n^3}{n^2+1} > M$ を解こうとすると大変です．そこで，$c_n = n - 1 + \dfrac{n(n-1)+1}{n^2+1}$ と変形すると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n(n-1)+1 > 0$ かつ $n^2+1 > 0$ ですから $c_n > n-1$ が成り立つことが分かります．すると，N をどう決めれば……）

(4) $d_n = -3n - 1$ $(n \in \mathbb{N})$ と定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n = -\infty$.

問４ 次の問に答えよ．

(1) 6/13 の講義で,「数列 $\{a_n\}$ が α に収束する」ことを

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

で定義した．これを正確に記述すると

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \left(n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon \right)$$

であることに注意して,「数列 $\{a_n\}$ が α に収束**しない**」ことの定義を，論理記号を用いて述べよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ で定義する．数列 $\{a_n\}$ が 1 に収束しないことを，**(1) で述べた定義に従って** 証明せよ[1]．

---

[1] (2) の数列 $\{a_n\}$ はどんな実数にも収束しない，即ち，$\{a_n\}$ は発散する のですが，余力があればこのことも証明してみましょう．