解析学 I　レポート問題 No.3　解答・解説　　(2024.6.17 出題)

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6Kai1.html にも置いてあります.

問１ 「答案にはさみうちの原理を使っていない」と書いた方は多かったのですが，はさみうちの原理を使わなければいけない理由は？正しい答案は？と言われると書けていない学生さんが意外と多かったです[1].

まずは,「$a_n = (-1)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ」という問題に対して次のような答案があったとしましょう.

> すべての自然数 n について $-1 \leqq (-1)^n \leqq 1$ であることにより
>
> $$\lim_{n\to\infty}(-1) \leqq \lim_{n\to\infty}(-1)^n \leqq \lim_{n\to\infty} 1$$
>
> である．従って $-1 \leqq \lim_{n\to\infty}(-1)^n \leqq 1$ であるから，$\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ は -1 以上 1 以下の数であることがわかる.

この答案は正しくないと感じられたことでしょう．では，元の問題に戻って,「$a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ」という問題に対して次のような答案はいかがでしょう.

> すべての自然数 n について $-1 \leqq \dfrac{\cos n}{n} \leqq 1$ であることにより
>
> $$\lim_{n\to\infty}(-1) \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} \leqq \lim_{n\to\infty} 1$$
>
> である．従って $-1 \leqq \lim_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n} \leqq 1$ であるから，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n}$ は -1 以上 1 以下の数であることがわかる.

「う～ん，答が間違っているわけじゃないけど，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n} = 0$ まで言えていたら完璧なんだよね」と思った方，いらっしゃいませんか？ でも，上の答案が×で下の答案が△というのもおかしい話です．だって，数学的な内容としては，本質的に同じことしか書いていないのですから.

上の答案が×で下の答案が△だと思ってしまう理由は,「数列 $\left\{(-1)^n\right\}$ は発散するが，数列 $\left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$ は収束する」という結論が頭の中に意識としてあるからなのでしょうね．ところが，この問題で聞かれている「$a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ」というのは,

- $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束するか発散するかを判定せよ.
- もしも収束するならば，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

[1] といっても，出題者側からしますとこれは意外でも何でもなく，学年が進んでも，いや，4 年生や大学院生になってもこの問題と同じような間違いを犯す人は多いものです．なので，いまこの問題を出題したのです.

という二つの問題を含んでいます．レポート問題や上に挙げた答案は，**もしも数列 $\{a_n\}$ が収束することがわかっているならば（収束することを仮定すれば）** 正しい答案です[2]．ところが，数列 $\{a_n\}$ が収束することは答案の中で一切示されていません．そこが問題点なのです．**数列 $\{a_n\}$ が収束することが証明されるまでは，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ という記号は用いてはいけないのです！**[3] 即ち，レポート問題の答案だと

$$「もし \{a_n\} が収束するならば \lim_{n\to\infty} a_n = 0」$$

が証明されたに過ぎません．

問題文の数列 $\{a_n\}$ が収束することを示すために，**はさみうちの原理**を用いるわけです．はさみうちの原理のステートメントを改めて書くと，

① $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n \leq c_n$,
② $\{a_n\}, \{c_n\}$ は収束し，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$

を仮定すると，$\{b_n\}$ も収束して $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$ が成立する，というものです．ここで $\{b_n\}$ が収束することは仮定ではなく**結論として得られるものである**ということに注意してください．今回の問題の場合，

① $\forall n \in \mathbb{N},\ -\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$,
② 数列 $\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}, \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ は収束し，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

が成り立っているわけですから，はさみうちの原理から $\left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$ は収束して $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n} = 0$ が言えることになります．これを意識して答案を書くと……

> すべての自然数 n について $-1 \leqq \cos n \leqq 1$ であることにより
>
> $$-\frac{1}{n} \leqq a_n = \frac{\cos n}{n} \leqq \frac{1}{n}$$
>
> が成り立つ．また，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ であるから，はさみうちの原理により数列 $\{a_n\}$ は収束し，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

となります．

---

[2] ここで,「数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がともに収束し，$a_n \leq b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ならば，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ が成立する」という命題を用いています．←高校の教科書にも記載されています（当然ながら証明はありません）．
しかし，数列の極限の厳密な定義を学んだ今は証明することができます（演習の**問題 2.4**）．

[3] 数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散，または負の無限大に発散することが証明されたら $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ や $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と書いて良いわけですが，ここで ∞ や $-\infty$ は「数」ではないということに注意してください（従ってこれらの式の $=$ は等号の意味ではありません）．

$\boxed{\textbf{問２}}$ 証明の最後は「$|c\,a_n - c\,\alpha| = |c||a_n - \alpha| < \cdots$（中略）$\cdots < \varepsilon$」としたいわけですから，帳尻を合わせるには最初に $n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{|c|}$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を選べばいいんだな……と思った方は**ほぼ**正解なのですが，$c = 0$ のときはどうするの？というのを忘れた方が多かったようです．数学科の学生であれば 0 で割り算していないか常に気を遣えるようにしてください．

［証明１］

(i) $c \neq 0$ のとき

任意に $\varepsilon > 0$ を取る．このとき，仮定より

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

が成立する．この N に対し，$n \geq N$ ならば

$$|c\,a_n - c\,\alpha| = |c||a_n - \alpha| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(c\,a_n) = c\alpha$ である．

(ii) $c = 0$ のとき

このときは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $c\,a_n = 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}(c\,a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = 0 \times \alpha = c\,\alpha$$

が成立する． ■

注意． $a_n = 0$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすことは（今となっては）自明なのでわざわざ証明を書くまでもありませんが，もし試験などで「定義に従って証明せよ」と言われたらきちんと書いてください（レポート問題 No.2 $\boxed{\textbf{問３}}$(2) を参照）．

注意． しかし，$c \neq 0$ と $c = 0$ で場合分けするのは面倒臭いですよね．実は，場合分けせずに答案を書くことができます．皆さん，このテクニックを是非身につけて下さい．

［証明２］ 任意に $\varepsilon > 0$ を取る．このとき，仮定より

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c| + 1}$$

が成立する．この N に対し，$n \geq N$ ならば

$$|c\,a_n - c\,\alpha| = |c||a_n - \alpha| \leq \frac{|c|}{|c| + 1}\varepsilon < \varepsilon$$

となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(c\,a_n) = c\,\alpha$ である． ■

注意． 次のような答案が多数ありました．

> 仮定により $\{a_n\}$ は α に収束するので，
> $$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}\text{ s.t. }n\geq N\implies|a_n-\alpha|<\varepsilon\qquad\cdots\cdots(*)$$
> が成立する．$|a_n-\alpha|<\varepsilon$ ならば $|ca_n-c\alpha|<|c|\varepsilon$ であり，$|c|\varepsilon$ は任意の正の数なので，$\lim_{n\to\infty}(c\,a_n)=c\alpha$ が示された．

そもそも,「$|a_n-\alpha|<\varepsilon$ ならば $|ca_n-c\alpha|<|c|\varepsilon$」は誤り（$c=0$ のときは $<$ ではなく $=$ です）なのですが，$c=0$ と $c\neq0$ の場合分けはここでは置いておくことにしまして，$(*)$ と書いただけでは，任意に $\varepsilon>0$ を取ったわけでも自然数 N を選んできたわけでもありません[4]．単に,「$\varepsilon>0$ を決めれば，それに応じて $n\geq N\implies|a_n-\alpha|<\varepsilon$ が成り立つように $N\in\mathbb{N}$ を取ることができる」としか言っていません.「任意に $\varepsilon>0$ を取る（一つ取って固定する）.」と書かなければ，ε という数は決まりません．

さらに,「$|c|\varepsilon$ は任意の正の数なので」というところが大問題です．これは,「$\varepsilon>0$ を任意に取ると，$\varepsilon'=|c|\varepsilon$ によって定まる ε' も正の数である」なのか,「$\varepsilon'>0$ を任意に取ると，$\varepsilon'=|c|\varepsilon$ によって定まる ε も正の数である」なのか分かりません．もちろん後者の意味でないとまずいのですが，それはちゃんと示すべき（$\varepsilon=\dfrac{\varepsilon'}{|c|}$ とおくと $\varepsilon>0$ であるから，と書くべき）ですし，そんなことなら最初から任意に $\varepsilon'>0$ を取って，$\varepsilon=\dfrac{\varepsilon'}{|c|}$ と置いて議論を進めるべきです．

次のような答案も多数ありました．

> 仮定により $\{a_n\}$ は α に収束するので，
> $$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}\text{ s.t. }n\geq N\implies|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{|c|}$$
> が成立する．このとき，
> $$|ca_n-c\alpha|=|c||a_n-\alpha|<|c|\cdot\frac{\varepsilon}{|c|}=\varepsilon\qquad\cdots\cdots(**)$$
> であるから，$\lim_{n\to\infty}(c\,a_n)=c\alpha$ が成立する．

皆さんはもうどこが良くないかお分かりになりますね．ε って何なのでしょうか？ N ってどこかで決まっているのでしょうか？ $(**)$ はどんな n に対して成り立つのでしょうか？[5]

注意． 問題文が「数列の収束の定義に従って……」と書いてあったら上の **［証明１］**，**［証明２］** のように書かなければいけませんが，今回の問題にはそのような指示がありませんので，6/18 の講義で学習した「数列の積の極限値は，極限値の積に等しい」という定理を用いて次のように解答することもできます．

［証明３］ 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=c$ で定義すると，$\lim_{n\to\infty}b_n=c$ であるから数列 $\{a_nb_n\}$ も収束し，
$$\lim_{n\to\infty}(c\,a_n)=\lim_{n\to\infty}(b_na_n)=\lim_{n\to\infty}b_n\cdot\lim_{n\to\infty}a_n=c\,\alpha$$
が成立する． ■

[4] $(*)$ は閉じた文章（命題）ですので，ε や N（や n）は他の文字に代えても同じ意味ですよね．

[5] もちろん，上のような書き方をしても論理的に証明を正しく書く方法はあるのですが，そんなことを知るよりも 3 ページの **［証明１］［証明２］** のような答案を書けるようにする方がずっと手っ取り早いですし，今後の理解も進みます．

$\boxed{\text{問３}}$ **「上に有界な単調増加数列は収束する」「下に有界な単調減少数列は収束する」**という定理を用いる問題です．高校数学では曖昧にしてきた問題の中には，この定理を用いると厳密に議論することができるものもあります．ただ，この問題は高校数学の範囲で解くことができます（もちろん，はさみうちの原理等の成立を認めれば，ですが）．

(1) **［証明］** 数学的帰納法を用いて示す．$n=1$ のときは $0<a_1=1<2$ であるから明らか．

$n=k$ $(k\in\mathbb{N})$ のときに $0<a_k<2$ であったと仮定する．すると，${a_k}^2+6>6>0$, $a_k+3>3>0$ であるから，$a_{k+1}=\dfrac{{a_k}^2+6}{a_k+3}>0$ である．また，

$$2-a_{k+1}=2-\frac{{a_k}^2+6}{a_k+3}=\frac{a_k(2-a_k)}{a_k+3}>0\quad(\because\ a_k>0,\ 2-a_k>0,\ a_k+3>0)$$

であるから，$a_{k+1}<2$ である．

従って，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $0<a_n<2$ であることが示された． ■

(2) **［証明］** (1) の結果により，数列 $\{a_n\}$ は 2 を上界にもつので，上に有界である．また，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$a_{n+1}-a_n=\frac{{a_n}^2+6}{a_n+3}-a_n=\frac{3(2-a_n)}{a_n+3}>0\quad(\because\ (1)\text{ の結果})$$

が成り立つので，$\{a_n\}$ は単調増加である．従って，$\{a_n\}$ は収束する． ■

注意. 単に「$a_n\leq a_{n+1}$ が成立する」とだけ書いた答案もありましたが,「いつ」「どこで」成り立つかをきちんと書く習慣をつけましょう[6]（数学でも 5W1H は大事なのです[7]）．

(3) **［解答］** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とおき，漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2+6}{a_n+3}$ の右辺の分母を払った

$$a_{n+1}(a_n+3)={a_n}^2+6$$

の両辺の極限を考えると

$$\alpha(\alpha+3)=\alpha^2+6$$

を得る．これを解くと $\alpha=2$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\underline{\ 2\ }$ である．

[6]とはいえ、全てをきっちり書くと答案が長くなって見にくくなる可能性がありますので，大事なポイントだけはしっかり押さえて書いてください．

[7]講義担当者の滝本は中学生のとき 5W1H しか習わなかったのですが，話によると 5W**2**H とか **6**W1H とかも使われているようです．ネットで調べたら **6**W**3**H (!) なんてのもあるのだそうで，昭和 49 年生まれのおじさん（＝滝本）は時代に付いていけません……．

注意． (3) で，漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2+6}{a_n+3}$ の両辺の極限を取りたいところですが，そうすると右辺の分母の極限である $\alpha+3$ が 0 にならないことのチェックが必要です．もちろん，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$ なので $\alpha \geq 0$ ですから O.K. です[8]．この一手間を省きたくて，上の答案では分母を払ってから極限を取っています．(ただし，そのまま漸化式の極限を考えた答案も ○ にしています．残念ながらこのことに気付いた答案は皆無でした．)

問４ 教科書 p.59, p.60 に載っているのでそちらを見てください……と書いて解説を終わりにしても良いのかもしれませんが，それではさすがに不親切ですね．この問題の出題意図は，確かに教科書に載っている内容ではありますが，きちんと順序立てて詳しく説明してください，ということでした．

(1) はヒントに「講義ノートにほぼ答が……」と書きましたが，講義中に私が口で言ったことを思い出せなければ，ノートを見ても ？ だったかもしれません．a_n は二項定理を用いて $a_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \frac{1}{n^k}$ で表せるし，$b_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ ですから，${}_nC_k \dfrac{1}{n^k}$ と $\dfrac{1}{k!}$ の大小を比べれば良いですね．

(1) **［証明］** 任意に $m \in \mathbb{N}$ を 1 つ取り固定する．このとき，$k = 1, 2, \ldots, m$ に対して

$$ {}_mC_k \frac{1}{m^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \leq \frac{1}{k!} $$

が成立するので，

$$ a_m = 1 + \sum_{k=1}^{m} {}_mC_k \frac{1}{m^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} = b_m $$

を得る． ■

(2) **［証明］** 任意に $m \in \mathbb{N}$ を 1 つ取り固定する．このとき，任意の $n \geq m$ に対し，

$$ a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \frac{1}{n^k} \geq 1 + \sum_{k=1}^{m} {}_nC_k \frac{1}{n^k} \qquad \cdots\cdots (*) $$

が成り立つ（$\because$ $k = m+1, \ldots, n$ に対して ${}_nC_k \dfrac{1}{n^k} > 0$）．次に，$k = 1, 2, \ldots, m$ に対して

$$ \lim_{n\to\infty} {}_nC_k \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \right) = \frac{1}{k!} $$

であるので，$(*)$ の不等式において $n \to \infty$ とすると，**命題**により

$$ e = \lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{m} {}_nC_k \frac{1}{n^k} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} {}_nC_k \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} = b_m $$

を得る． ■

[8]数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束し，かつ $a_n \geq b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるならば，$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$ であることを用いています（演習の**問題 2.4**）．

なお，仮定が $a_n > b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ となっていても，結論は $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$ のままであることに注意してください．

注意. 演習の**問題 2.4** と**命題**の違いは，**「任意の $n \geq m$ に対して成り立つ」としか仮定されていない**ことですが，証明はほぼ同じです．数列の極限は初めの数項を取り除いても変わらないことに注意してください（数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ が第 m 項から始まっていると考えれば良い）．

(3) ［**証明**］ (1), (2) の結果により，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し $a_m \leq b_m \leq e$ を得る．また $\lim_{m\to\infty} a_m = e$ であるので，はさみうちの原理から $\lim_{m\to\infty} b_m = e$ である． ■

注意. 数列 $\{a_n\}$ も $\{b_n\}$ もともに e に収束するわけですが，各 n に対して a_n, b_n を計算すると次のようになります（実際の e は $2.718281828\cdots$）．これを見ると，e の近似計算には $\{b_n\}$ の方がはるかに適していることがお分かりになるでしょう[9].

n	a_n	b_n	n	a_n	b_n
1	2.000000000	2.000000000	7	2.546499697	2.718253968
2	2.250000000	2.500000000	8	2.565784513	2.718278769
3	2.370370370	2.666666666	9	2.581174791	2.718281525
4	2.441406250	2.708333333	10	2.593742460	2.718281801
5	2.488320000	2.716666666	11	2.604199011	2.718281826
6	2.521626371	2.718055555	100	2.704813829	2.718281828

コメント. 意欲のある方は，是非次の問題にも取り組んでみてください．

$\boxed{\text{問}}$ $c_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$ で定義される数列 $\left\{c_n\right\}_{n=2}^{\infty}$ を考える．

(1) 数列 $\left\{c_n\right\}_{n=2}^{\infty}$ は下に有界かつ単調減少であることを示せ．(従って $\{c_n\}$ は収束する）

(2) $\lim_{n\to\infty} c_n = e$ を示せ．

実際には，(2) の結果だけを独立に示すことができるので，$\{c_n\}$ の極限値を求めるだけであれば (1) は不要なのですが，(1) の問題にもチャレンジしてください．

[9] しかも $\{b_n\}$ であれば，小さい n に対しては手計算をしてもそれほど大変ではありません．