解析学 I　レポート問題 No.2　解答・解説　　（2024.6.10 出題）

プリントは `http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6Kai1.html` にも置いてあります.

問１ (1) **［証明］** 仮定より A は上に有界であるから、実数の連続性により $\sup A$ が存在する．a は A の上界であり，$\sup A$ は A の上界全体の集合の最小値であるから，$\sup A \leq a$ である． ■

注意． 問題文を変えて

「任意の $x \in A$ に対して $x < a$ である」を満たすならば，$\sup A < a$ である

という命題を考えると，これは偽です．例えば，$A = (-\infty, a)$ とおくと，任意の $x \in A$ に対して $x < a$ ですが，$\sup A = a$ です.「任意の $x \in A$ に対して $x < a$」が成り立っていたとしても，$\sup A \leq a$ **（←等号が付く！）** しか成立しないということに注意してください.

注意． (1) を「論理記号を用いた $\sup A$ の定義」を用いて書くならば，次のようになります。

仮定より A は上に有界であるから，実数の連続性により $\sup A$ が存在する.
$m = \sup A$ とおき，$m > a$ であると仮定する．すると，上限の定義により次が成り立つ.

$$\forall b < m,\ \exists x \in A \text{ s.t. } b < x \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成立する．しかし，$b = a$ とおくと，$b < m$ であり，仮定から「$\forall x \in A,\ x \leq b$」が成立する．これは $(*)$ の否定が真であることを意味するので矛盾である.

従って，$\sup A = m \leq a$ である.

(2) **［証明］** 実数の連続性により B の上限 $\sup B$ が存在する．まず，A が上に有界であることを示す．（即ち，$\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \in A, x \leq a$ を示す）

$a = \sup B\ (\in \mathbb{R})$ とおく．すると $\sup B$ の定義から

$$\forall x \in B,\ x \leq a \qquad \cdots\cdots (\diamondsuit)$$

が成立する.

任意に $x \in A$ を取る．すると仮定 $A \subset B$ から $x \in B$ を得る．故に，$(\diamondsuit)$ により $x \leq a = \sup B$ であるから，A は上に有界である.

従って，A は空でない上に有界な集合であるから，実数の連続性により $\sup A$ が存在する．また，$a = \sup B$ が A の上界であることと $\sup A$ は A の上界全体の集合の最小値であることにより $\sup A \leq a = \sup B$ が成立する． ■

注意． 最後の段落（「従って，A は……」の部分）は，直前の段落で「任意の $x \in A$ に対して $x \leq \sup B$ である」が示されているわけですから,「従って，(1) の結果から $\sup A \leq \sup B$ であることが分かる.」とだけ書いても O.K. です.

$\boxed{\textbf{問 2}}$ まずは A を具体的に書き出してみて $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$ がどうなるか予想してみましょう．すると

$$A = \left\{ 0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ -\frac{4}{5},\ \frac{7}{6},\ -\frac{6}{7},\ \frac{9}{8}\ \cdots \right\}$$

ですので，$\max A = \sup A = \dfrac{3}{2}$, $\inf A = -1$ であり，$\min A$ は存在しないことが予想されます．$\max A$, $\sup A$, $\min A$ については概ね正しい議論ができていましたが，$\inf A$ は難関だったようです．しっかり復習して，もう一度ご自身の手で解答を書いてみましょう．

[解答] $\underline{\bullet\ \max A}$

(i) $\forall x \in A,\ x \leq \dfrac{3}{2}$, (ii) $\dfrac{3}{2} \in A$ を示す.

任意に $x \in A$ を取ると，A の定義より $x = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ と書ける．このとき，

$\underline{\text{(i) } n \text{ が奇数のとき}}$ $(-1)^n = -1$, $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{1} = 1$ であるから $x = (-1)^n + \dfrac{1}{n} \leq -1+1 = 0 < \dfrac{3}{2}$ である.

$\underline{\text{(ii) } n \text{ が偶数のとき}}$ $(-1)^n = 1$, $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2}$ であるから $x = (-1)^n + \dfrac{1}{n} \leq 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ である.

故に (i) は示された.

また，$2 \in \mathbb{N}$ であり $\dfrac{3}{2} = (-1)^2 + \dfrac{1}{2}$ であるから (ii) も成立する.

従って，$\underline{\max A = \dfrac{3}{2}}$ である.

$\underline{\bullet\ \sup A}$

$\max A$ が存在するので，$\sup A = \max A = \underline{\dfrac{3}{2}}$.

[別解] （$\sup A = \dfrac{3}{2}$ を定義通り示すと……）

(i) $\forall x \in A,\ x \leq \dfrac{3}{2}$, (ii) $\forall a < \dfrac{3}{2}, \exists x \in A$ s.t. $a < x$ を示す.

(i) は $\max A = \dfrac{3}{2}$ の証明における (i) と同じ.

(ii) を示すために，任意に $a < \dfrac{3}{2}$ を取る．このとき，$x = \dfrac{3}{2}$ とおけば，$x = (-1)^2 + \dfrac{1}{2} \in A$ かつ $a < \dfrac{3}{2} = x$ が成立する．従って (ii) が示された.

従って，$\underline{\sup A = \dfrac{1}{4}}$ である.

$\underline{\bullet\ \inf A}$

$\boxed{\text{(i) } \forall x \in A,\ x \geq -1}$ と $\boxed{\text{(ii) } \forall a > -1,\ \exists x \in A \text{ s.t. } x < a}$ を示す.

任意に $x \in A$ を取ると，A の定義より $x = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ と書ける．従って，

$$x = (-1)^n + \frac{1}{n} \geq -1 + \frac{1}{n} > 1$$

が成立する．故に (i) は示された.

次に，任意に $a > -1$ を取る．
このとき，$n_0 = 2\left[\dfrac{1}{a+1}\right] + 1$ とおき，$x = (-1)^{n_0} + \dfrac{1}{n_0}$ と定めると，$\left[\dfrac{1}{a+1}\right] \geq 0$ であるから $n_0 \in \mathbb{N}$ であり，従って $x \in A$ である．このとき

$$\begin{aligned} x = (-1)^{n_0} + \frac{1}{n_0} &= -1 + \frac{1}{n_0} \quad (\because\ n_0 \text{ は奇数}) \\ &= -1 + \frac{1}{2\left[\frac{1}{a+1}\right] + 1} \\ &\leq -1 + \frac{1}{\left[\frac{1}{a+1}\right] + 1} < -1 + \frac{1}{\frac{1}{a+1}} = -1 + (a+1) = a \end{aligned}$$

が成立するので，(ii) は示された．

従って，$\underline{\inf A = -1}$ である．

• $\min A$

いま，$\min A$ が存在したと仮定すると，$\min A = \inf A = -1$ となる．ところが，$\inf A = -1$ の証明の (i) より，任意の $x \in A$ に対して $x > -1$ であったから $-1 \notin A$ である．これは $\min A = -1$ であることに矛盾する．

従って，A の最小値は存在しない．

コメント． 上に書いた答案で一番の難所は $n_0 = 2\left[\dfrac{1}{a+1}\right] + 1$ とおくところではないでしょうか．なぜこんな摩訶不思議？な数がいきなり登場したのでしょうか．それは，頭の中で次のようなことを考えていたからです．目標は，任意に $a > -1$ を取ったとき，$x \in A$ で $x < a$ となる x を見つけることでしたね．

（頭の中）

- $x \in A$ なら $x = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ という形で書けている．
- $(-1)^n + \dfrac{1}{n}$ は n が偶数のときは正の数，n が奇数のときは 0 以下である．
- a は -1 よりほんのちょっと大きい数も想定しているのだから，n が偶数だとまずいぞ．
- だから n は奇数にしなければいけないだろう．
- n が奇数なら $x = (-1)^n + \dfrac{1}{n} = -1 + \dfrac{1}{n}$ となっているぞ．
- そのとき $x = -1 + \dfrac{1}{n} < a$ となって欲しいわけだ．
- これを解けば $n > \dfrac{1}{a+1}$ となるから，$n = \left[\dfrac{1}{a+1}\right] + 1$ とすれば良さそう．
- あっ！ でもこれだと n が奇数である保証はないや……それなら，2 倍して 1 を引けば奇数になって良さそう．

……ということで $n_0 = 2\left[\dfrac{1}{a+1}\right] + 1$ が出てきたのです．無論，これ以外にもいろいろな解答の仕方があり，「$\dfrac{1}{a+1}$ より大きい**奇数**を一つ取り，それを n_0 とおく」と書いても O.K. です．

コメント. A の最小値が存在しないことについては,「$\min A$ が存在するならば $\min A = \inf A$ が成り立つ」という命題を使いましたが，この命題を使わずに直接証明するならば次のようになります.

[別証] いま，$m = \min A$ が存在したと仮定すると，$m \in A$ であるから，$m = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ と書ける．$\cdots\cdots(*)$

ここで，$x = (-1)^{n+2} + \dfrac{1}{n+2}$ とおくと（$n+2 \in \mathbb{N}$ なので）$x \in A$ であり，$(-1)^{n+2} = (-1)^n \cdot (-1)^2 = (-1)^n$ なので

$$x = (-1)^{n+2} + \frac{1}{n+2} = (-1)^n + \frac{1}{n+2} < (-1)^n + \frac{1}{n} = m$$

が成立する．これは $\exists x \in A$ s.t. $x < m$ が成り立つことを意味し，$m = \min A$ であることに矛盾する．従って，A の最小値は存在しない.

コメント. 上の証明において，$(*)$ の後で $x = (-1)^{2n+1} + \dfrac{1}{2n+1}$ とおいても，$x \in A$ かつ $x < m$ が示せます．他にも n の偶奇で場合分けして考えるなど，いろいろな解答がありました.

注意. 「A に最小値が存在しないこと」は次の命題と同値になります（各自証明してみてください）.

$$\forall x \in A,\ \exists y \in A \text{ s.t. } x > y.$$

これを用いても証明することができます（本質的には上の証明と同じになりますけど）.

$\boxed{\textbf{問3}}$ (1) **[証明]** 任意に $\varepsilon > 0$ を取る．このとき，$N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$ とおくと $N \in \mathbb{N}$ である．$n \geq N$ ならば

$$|a_n - 0| = \left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon$$

が成立するので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$ ■

注意. $N = \left[\dfrac{|\cos n|}{\varepsilon^2}\right] + 1$ などと書いてある答案がいくつかありました．収束することの定義は「$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\cdots$」です．これを見ると分かるように，$\varepsilon > 0$ を任意にとってきた時点では n は**まだ登場していません**．ですので，N は n に依っては（n を使って表現しては）マズイのです．結局，N は ε にしか依らないということになります.

(2) **[証明]** 任意に $\varepsilon > 0$ を取る．このとき，$N = 1$ とおく.
$n \geq N$ ならば

$$|b_n - 2024| = |2024 - 2024| = 0 < \varepsilon \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成立するので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 2024.$ ■

注意． 同様にして，$a_n = \alpha\ (n \in \mathbb{N})$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が α に収束することも示すことができます．また，$N = [\varepsilon] + 1$ など，無理して ε に依存するようにした答案もありました．勿論，正しく議論できていれば正解なのですが,「N は ε にしか依らない」であって「N は ε に依らなければいけない」ではないです.

(3) **［証明］** 任意に $M > 0$ を取る．このとき，$N = [M] + 2$ とおくと $N \in \mathbb{N}$ である．
$n \geq N$ ならば，$n(n-1) + 1 > 0$ かつ $n^2 + 1 > 0$ であるから

$$c_n = n - 1 + \frac{n(n-1)+1}{n^2+1} > n - 1 \geq N - 1 = [M] + 1 > M$$

が成立するので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$. ■

［別証］ 任意に $M > 0$ を取る．このとき，$N = [2M] + 1$ とおくと $N \in \mathbb{N}$ である．$n \geq N$ ならば,

$$c_n = \frac{n^3}{n^2+1} \geq \frac{n^3}{n^2+n^2} = \frac{n}{2} \geq \frac{N}{2} > \frac{2M}{2} = M$$

が成立するので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$. ■

(4) **［証明］** 任意に $M > 0$ を取る．このとき，$N = \left[\dfrac{M}{3}\right] + 1$ とおくと $N \in \mathbb{N}$ である．
$n \geq N$ ならば

$$d_n = -3n - 1 \leq -3N - 1 < -3N = -3\left(\left[\frac{M}{3}\right] + 1\right) < -3 \cdot \frac{M}{3} = -M$$

が成立するので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n = -\infty$. ■

注意． 上の解答を書く際，実際に $d_n < -M$ を解いて N をどう決めればよいかを考えるわけです．ただ，$d_n < -M$ が満たされるギリギリの n を求める必要はありません.「$n \geq N$ ならば $d_n < -M$」が満たされるような N を一つ見つければ良い（つまり $d_n < -M$ が満たされるための**十分条件**を求めれば良い）わけです．ギリギリの n を求める方法でやろうとすると，$N = \max\left\{\left[\dfrac{M-1}{3}\right] + 1, 1\right\}$ となります（もちろん，この N で以降の議論を正しく進めていれば正解です[1]）.

注意． 講義では $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ の定義として「$\forall M < 0$」で始まるものと「$\forall M > 0$」で始まるものの両方を書きましたが，証明を書く際には「$\forall M > 0$」で始まるもので考えた方が皆さんにとって書きやすいと思います（実際，符号の勘違いによるミスが多かったです）.

---

[1]……正解ではありますが，かなり注意が必要です．$N = \left[\dfrac{M-1}{3}\right] + 1$ としてしまうと $M < 1$ のときに N は自然数にならなくなってしまいます．max を取らなくても「N を $\dfrac{M-1}{3}$ より大きな自然数とする」や「任意に $M \geq 1$ を一つ取ったとき，$N = \left[\dfrac{M-1}{3}\right] + 1$ とおく」などと書いてあれば正しいです.

$\boxed{\textbf{問4}}$ (1) ［解答］ $\underline{\exists\varepsilon > 0 \text{ s.t.}}$

$$\underline{\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \big(n \geq N \ \wedge \ |a_n - \alpha| \geq \varepsilon\big).}$$

(2) ［証明］ $\varepsilon = 1$ とおく．

任意に $N \in \mathbb{N}$ を取る．このとき $n = 2N - 1$ $(\in \mathbb{N})$ とおく．

すると，$n \geq N$ であり，

$$|a_n - 1| = \left|\left((-1)^{2N-1} + \frac{1}{2N-1}\right) - 1\right| = \left|-2 + \frac{1}{2N-1}\right| = 2 - \frac{1}{2N-1} \geq 2 - 1 = 1 = \varepsilon$$

が成立する．よって，数列 $\{a_n\}$ は 1 に収束しない． ■

<u>注意．</u> N について「(i) N が奇数のとき $\to n = N$ とおく」「(ii) N が偶数のとき $\to n = N + 1$ とおく」の二つに場合分けをした答案を書くこともできます．

<u>注意．</u> 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，数列 $\{a_n\}$ が α に収束しないことも次のようにして証明できます．

［証明］ 任意に $\alpha \in \mathbb{R}$ をとる．

<u>(i) $\alpha \geq 0$ のとき</u>

$\varepsilon = \dfrac{2}{3}$ とおく．任意に $N \in \mathbb{N}$ を取る．このとき $n = 2N + 1$ $(\in \mathbb{N})$ とおく．すると，$n \geq N$ であり，

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| &= \left|\left((-1)^{2N+1} + \frac{1}{2N+1}\right) - \alpha\right| = \left|-1 + \frac{1}{2N+1} - \alpha\right| \\ &= 1 - \frac{1}{2N+1} + \alpha \qquad \left(\because\ 1 - \frac{1}{2N+1} > 0,\ \alpha \geq 0\right) \\ &\geq 1 - \frac{1}{2N+1} \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する．よって，数列 $\{a_n\}$ は α に収束しない．

<u>(ii) $\alpha < 0$ のとき</u>

$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ とおく．任意に $N \in \mathbb{N}$ を取る．このとき $n = 2N$ $(\in \mathbb{N})$ とおく．すると，$n \geq N$ であり，

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| &= \left|\left((-1)^{2N} + \frac{1}{2N}\right) - \alpha\right| = \left|1 - \frac{1}{2N} - \alpha\right| \\ &= 1 - \frac{1}{2N} - \alpha \qquad \left(\because\ 1 - \frac{1}{2N} > 0,\ \alpha < 0\right) \\ &\geq 1 - \frac{1}{2N} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する．よって，数列 $\{a_n\}$ は α に収束しない．

以上の結果，数列 $\{a_n\}$ はどんな実数にも収束しない，即ち $\{a_n\}$ は発散することが示された． ■