解析学 I　レポート問題 No.1　解答・解説　　(2024.6.6 出題)

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6Kai1.html にも置いてあります.

問 1　**[解答]**

- **A が上に有界でない**：$\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in A \text{ s.t. } x > a.$
- **A が下に有界でない**：$\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in A \text{ s.t. } x < a.$

注意.　「A にはいくらでも大きな数がある」「A にはいくらでも小さな数がある」を数学的に表現したものです．試験で「上（下）に有界でない」を論理記号を用いて書けと言われたら上のように解答して欲しいわけです．ただ，例えば

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in A \text{ s.t. } x \geq a,$$
$$\forall a > 0,\ \exists x \in A \text{ s.t. } x > a$$

なども,「A が上に有界でない」と**同値な**命題となります. (←なぜでしょうか？)

問 2　まずは，配布したレポート問題の問題文に誤植があったことを深くお詫び申し上げます．さて，(1), (2) で示すべきことを論理記号を用いて書くと，

$$(1)\ \forall x \in A,\ x \geq \frac{1}{6}, \qquad (2)\ \forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in A \text{ s.t. } x > a$$

となります．(1) は「当たり前すぎて何を書けば良いのかわからない」と感じた方も多いようです（もちろん，当たり前だ（正しい）と感じなければ証明は書けないわけですが）．何を書けば証明したことになるのかをきちんと理解することはとても重要です．一方，(2) は出来が良くない問題となりました．任意に $a \in \mathbb{R}$ を取ったとき，どのように x を選べば良いかが最大の（そして唯一の）問題です．$x > a$ となって欲しいということは，例えば $x = a + 1 = \dfrac{1}{2-t}$ となるような t を取ってくればいいんだな，つまり $t = 2 - \dfrac{1}{a+1}$ とでもおけば良いだろうということは想像できそうです．しかし！ こうして決めた t が $-2 \leq t < 2$ を満たすかどうかは確認しなければいけません．もし t が -2 より小さいときは…….

「A には上界が存在しない」ことを証明するという方針でも (2) の問題は解けますが，本質的に書くことは同じです．

[証明]　(1) 任意に $x \in A$ を取る．すると，A の定義より $x = \dfrac{1}{2-t}$ $(-2 \leq t < 2)$ と書ける．このとき，$0 < 2 - t \leq 4$ であるから，

$$x = \frac{1}{2-t} \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$$

が成立する．故に，$\dfrac{1}{6}$ は A の下界である．　■

(2) 任意に $a \in \mathbb{R}$ を取る．

(i) $a < 0$ のとき

$x = \dfrac{1}{4}$ とおく．すると，$t = -2 \in [-2, 2)$ に対して $x = \dfrac{1}{2-t}$ であるから $x \in A$ であり，また $a < 0 < \dfrac{1}{4} = x$ が成立する．

(ii) $a \geq 0$ のとき

$x = a+1$ とおく．すると，$t = 2 - \dfrac{1}{a+1}$ に対して $\dfrac{1}{2-t} = \dfrac{1}{\frac{1}{2-\left(2-\frac{1}{a+1}\right)}} = a+1 = x$ であり，また $a \geq 0$ であるから

$$2 > t = 2 - \frac{1}{a+1} \geq 2 - \frac{1}{1} = 1 \geq -2$$

が成り立つので，$x \in A$ である．また $a < a+1 = x$ が成立する．

故に，A は上に有界ではない． ■

注意． (2) における x の選び方は一例ですので，他にもいろいろな選び方があります．例えば，

$$x = |a| + 1$$

とおくと，$t = 2 - \dfrac{1}{|a|+1}$ に対して $x = \dfrac{1}{2-t}$ であり，$2 > t = 2 - \dfrac{1}{|a|+1} \geq 2 - \dfrac{1}{1} = 1 \geq -2$ なので $x \in A$ であり，$a \leq |a| < |a| + 1 = x$ が言えるので，a の値に関して場合分けをすることなく証明が書けます．

注意． 実際には $A = \left[\dfrac{1}{4}, \infty\right)$ となっているのですが，これはきちんと証明しなければ用いることはできません．

問３ (1) の A は下に有界だが上に有界でない，(2) の B は上にも下にも有界，(3) の C は上に有界だが下に有界でない，ということは想像できるでしょうから，後はこれを論理的に示すことです．(2) では「B が上に有界」「B が下に有界」を別々に示しても良いですが，下の解答では同時に示してみます．

[解答] (1) $\boxed{\bullet\ A\ \text{が上に有界でないこと}}$

任意に $a \in \mathbb{R}$ を取る．このとき，$x = \max\{0, a+1\}$ とおくと $x \geq 0$ であるから $x \in A$ である．また，$x \geq a+1 > a$ が成り立つので，A は上に有界ではない．

$\boxed{\bullet\ A\ \text{が下に有界であること}}$

$a' = 0$ とおく．任意の $x \in A$ を取ったとき，A の定義より明らかに $x \geq 0 = a'$ であるから，A は下に有界である．

従って，A は (iii) 下に有界であるが，上に有界でない．

注意． 上に有界でないことの証明の中で，x は

$$x = \begin{cases} 0 & (a < 0\ \text{のとき}) \\ a+1 & (a \geq 0\ \text{のとき}) \end{cases}$$

のように場合分けして考えても良いです（(3) では場合分けの方法で答案を書いてみます）．これを見ても分かるように，x の選び方は一通りではないのです（議論さえ正しければ何でも正解です）[1].

(2) 任意に $b \in B$ を取ると，$b = \dfrac{1}{p^2 - 2p + 3}$ $(p \in \mathbb{R})$ と書ける．

すると，$p^2 - 2p + 3 = (p-1)^2 + 2 \geq 2$ であるから，

$$0 < b = \frac{1}{p^2 - 2p + 3} \leq \frac{1}{2}$$

となるから，0 は B の下界，$\dfrac{1}{2}$ は B の上界である．

従って，B は(i) 有界である．

(3) $\boxed{\bullet\ C\ \text{が上に有界であること}}$

$a = 2$ とおく．任意の $c \in C$ を取ると，$c = 2 - \sqrt{x+2}$ $(x \in [0, \infty))$ と書ける．このとき，

$$c = 2 - \sqrt{x+2} \leq 2 = a$$

が成立するので，C は上に有界である．

[1] 例えば，$x = |a| + 1$ としても $x \in A$ かつ $x > a$ であることが言えます．

$\boxed{\bullet\ C \text{ が下に有界でないこと}}$

任意に $a \in \mathbb{R}$ を取る．

Case 1. $a > 2$ のとき

$c = 2 - \sqrt{2}$ とおくと，$x = 0 \in [0, \infty)$ に対して $c = 2 - \sqrt{x+2}$ であるから $c \in C$ であり，$c = 2 - \sqrt{2} < 2 < a$ が成立する．

Case 2. $a \leq 2$ のとき

$x = (2-a)^2$ とおくと，$x \in [0, \infty)$ である．この x に対して $c = 2 - \sqrt{x+2}$ とおくと，$c \in C$ である．また，$2 - a \geq 0$ であるから

$$c = 2 - \sqrt{x+2} = 2 - \sqrt{(2-a)^2 + 2} < 2 - \sqrt{(2-a)^2} = 2 - (2-a) = a$$

が成立する．

故に C は下に有界ではない．

以上の結果，C は (ii) 上に有界であるが，下に有界でない．

注意． C が下に有界でないことの証明で，任意に $a \in \mathbb{R}$ を取ったときに $c < a$ を満たす $c \in C$ をどう選ぶか？が最大な問題であるわけです．レポートでは学生さんによっていろいろな選び方がありました．上の解答では a の値に関して場合分けしましたが，実は $x = (2-a)^2$ とすると $x \in [0, \infty)$ であり，この x に対して $c = 2 - \sqrt{x+2}$ とおくと，

$$c = 2 - \sqrt{x+2} = 2 - \sqrt{(2-a)^2 + 2} < 2 - \sqrt{(2-a)^2} = 2 - |2-a| \leq 2 - (2-a) = a$$

となり，場合分けをせずに証明できます[2]．

[2] $|2-a| \geq 2-a$ が成り立つことを使っています．