解析学 I　補足プリント No.3　　（2024.6.27 配布）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6Kai1.html にも置いてあります．

● 実数の十進小数展開

皆さんは，どんな実数 α も小数で表すことができる（有限で終わるか無限に続くかは α が何であるかに依るが）ことを知っている，というか今まで信じてきたことと思います．例えば 2 の平方根の一つ $\sqrt{2}$ や円周率 π は

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420\cdots$$
$$\pi = 3.14159265358979323846264338327\cdots$$

と表せます．しかし，そのことは**実数の連続性**から導かれる事実であるということを強く意識しておく必要があります．

任意の実数 α に対して α が小数で表すことができるかを考えたいわけですが，$\alpha = [\alpha] + (\alpha - [\alpha])$ と考えると，$[\alpha]$ は整数で $0 \leq \alpha - [\alpha] < 1$ ですので，任意の $\beta \in [0, 1)$ に対して β が小数で表すことができるかどうかを考えれば十分です．

小数第 1 位が a_1, 小数第 2 位が a_2, $\cdots$, 小数第 n 位が a_n, $\cdots$ である小数

$$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots \qquad (*)$$

（ただし任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$）は級数を用いて $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ と表すことができます．まずはこの級数が収束する（即ち，一つの実数を表す）ことを示しましょう．それは，次の二つの事実

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq \dfrac{a_n}{10^n} \leq \dfrac{10}{10^n} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$ が成り立つ．
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ は収束する．

と，今日の講義で学ぶ**比較判定法**により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ は収束することが分かります．

次に，本題である，任意の実数 $\beta \in [0, 1)$ が $(*)$ の形に表されることを示しましょう．任意に $\beta \in [0, 1)$ を一つ取ります．$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ を次のように定めます．

- $a_1 = [10\beta]$
- $a_2 = \left[100\left(\beta - \dfrac{a_1}{10}\right)\right]$
- $a_3 = \left[1000\left(\beta - \dfrac{a_1}{10} - \dfrac{a_2}{100}\right)\right]$

  $\vdots$
- $a_n = \left[10^n\left(\beta - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k}\right)\right]$

  $\vdots$

こうして得られた $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ を用いて作った級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ が β に収束することを証明しましょう．この級数の第 n 部分和を $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ とおきます．

問１ 帰納法を用いて次を示せ[1].

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq \beta - S_n = \beta - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} < \frac{1}{10^n}$.

いま，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ ですから，(ii) とはさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}(\beta - S_n) = 0$，即ち $\lim_{n\to\infty} S_n = \beta$ であることが言え，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \beta$ が示されました.

実数を $(*)$ のように表すことを**十進小数展開**と呼びます．もちろん，$[0,1)$ の元に限らず任意の実数は上のような十進小数展開ができます[2].

ところが，実数の十進小数展開はいつも 1 通りであるとは限りません．例えば，$\frac{1}{2}$ を十進小数展開すると $0.50000\cdots = 0.49999\cdots$ のように 2 通りに表せてしまいます．しかし，このような場合には常に前者の表し方をする（つまり,「ある位から先が全て 9 である」という状況を起こさないこととする）と，$[0,1)$ の任意の元の十進小数展開はただ 1 通りであることが証明できます.

（即ち，$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots = 0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots \implies \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$）

問２ 上で述べたことを示せ.

ところで，上の議論において，十進小数展開の「10」という数に特別な意味はない[3]ということがわかるでしょう．$[0,1)$ の任意の元 β は次のようにも展開できます.

$$\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}, \qquad a_k \in \{0,1\}$$

これを**二進小数展開**と呼びます．実際に小数で表す際には，二進法であることを強調するために $\beta = 0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots_{(2)}$ と書きます．例えば,

$$0.10101010\cdots_{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3}$$

です.（十進小数展開についても，十進法であることを強調したい時は $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots_{(10)}$ と書く）

十進小数展開の時と同様に，二進小数展開も一意とは限りませんが，例えば $0.11000\cdots_{(2)} = 0.10111\cdots_{(2)}$ においては常に前者の表し方をする（つまり,「ある位から先が全て 1 である」という状況を起こさない）こととすると，$[0,1)$ の任意の元の二進小数展開はただ 1 通りであることが言えます.（即ち，$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots_{(2)} = 0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots_{(2)} \implies \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$）

同様にして 2 以上の自然数 p に対して p 進小数展開を考えることもできます.

---

[1] $n=1$ のときは，$0 \leq 10\beta < 10$ より $a_n = [10\beta] \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ が言え，また $10\beta - 1 < [10\beta] \leq 10\beta$ ですから $0 \leq \beta - \frac{a_n}{10} = \frac{10\beta - [10\beta]}{10} < \frac{1}{10}$ が成立します.

[2] この証明では「実数の連続性」が表には出ていませんが，ガウス記号の存在の証明の際に「$\mathbb{N}$ が上に有界でないこと」を使っていて，それは実数の連続性から導きました．また，比較判定法の証明には「正項級数に対しては，級数の和が収束することと部分和が上に有界であることは同値である」ことを使っていて，それを示すには「上に有界な単調増加数列は収束する」ことを使っていて，さらにそれを示すのに実数の連続性が用いられているので，やっぱり**全ての始まりは公理として認めた実数の連続性なのです！**

[3] 人間の手の指が 10 本であるということから十進法を用いるようになった，と言われており，その意味では 10 という数に意味はあるのですが，ここでは「10 のまとまりができたら位が一つ上がる」の「10」を別の 2 以上の自然数にしてもいいだろう，ということです.