解析学 I　補足プリント No.2　　（2024.6.13 配布）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6Kai1.html にも置いてあります．

● 前回の補足

Th.　$a<b$ を満たす任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して，ある $x\in\mathbb{Q}$ が存在して $a<x<b$ を満たす．

この性質を **「有理数の稠密性」** と言います．数直線上の全ての有理数に点を打ったとしましょう．$\sqrt{2}$ のように，有理数でない実数（つまりは無理数）もありますから，打った点と点の間に隙間が空いているように思えます．しかし，上の **Th.** は，どんな異なる二つの実数の間にも有理数が存在すると言っているのですから，どこにも隙間はないということになります．つまり「有理数の稠密性」を平たく言えば，**「有理数全体は数直線を埋め尽くさないけど隙間は空いていない」** ということになります[1]．

では，**Th.** を証明するにはどうすれば良いでしょうか．例えば $a=\pi$, $b=\sqrt{10}$ として，$a<x<b$ を満たす有理数 x を探してみましょう．即ち，

$$3.14159265\cdots=a=\pi<x<\sqrt{10}=b=3.16227766\cdots\qquad(*)$$

を満たす $x=\dfrac{q}{p}$ $(p\in\mathbb{N},q\in\mathbb{Z})$ を一つ求めます．なんだ，そんなの $x=3.15=\dfrac{315}{100}=\dfrac{63}{20}$ でいいじゃん，と思われる方が多いかとは思いますが，実数を無限小数で表すことができることは当たり前ではなく，実数の連続性から導かれることなのです[2]．ただ，ここでは以下の説明をわかりやすくするために小数による表示を併記します．

有理数とは $\dfrac{(\text{整数})}{(\text{自然数})}$ と表される数でした．それでは，a と b の間に入る有理数を，分母が小さい方から順に調べていきましょう．まずは $(*)$ を通分して分母を 2 にしてみます．

$$\frac{6.28318530\cdots}{2}=\frac{2a}{2}=\frac{2\pi}{2}<\frac{\triangle}{2}<\frac{2\sqrt{10}}{2}=\frac{2b}{2}=\frac{6.32455532\cdots}{2}$$

$\triangle$ に $2a=6.28318530\cdots$ と $2b=6.32455532\cdots$ の間の整数が入れば良いのですが……残念ながらそのような整数はありません．では次に分母を 3 にしてみましょう．

$$\frac{9.42477796\cdots}{3}=\frac{3a}{3}=\frac{3\pi}{3}<\frac{\triangle}{3}<\frac{3\sqrt{10}}{3}=\frac{3b}{3}=\frac{9.48683298\cdots}{2}$$

これも $\triangle$ に入る整数はありません．それでは分母が 4 の場合です．

$$\frac{12.56637061\cdots}{4}=\frac{4a}{4}=\frac{4\pi}{4}<\frac{\triangle}{4}<\frac{4\sqrt{10}}{4}=\frac{4b}{4}=\frac{12.64911064\cdots}{4}$$

これでもダメです．しかし，分母 p をどんどん大きくしていけばいつかは pa と pb の差が 1 より大きくなって，pa と pb の間に整数が存在しそうです．即ち，

$$pb-pa>1\quad\Longleftrightarrow\quad p(b-a)>1\quad\Longleftrightarrow\quad p>\frac{1}{b-a}$$

[1]試験で「有理数の稠密性を説明せよ」と尋ねられたら，定理で述べている形で書いてください（←勿論ですが）

[2]$\pi=3.14159265\cdots$ の右辺の意味は，$3+0.1+0.04+0.001+0.0005+\cdots$ の意味ですから，これは級数です．即ち，数列や級数の収束の概念が必要です．

であれば良さそうです[3]．この例の場合，$\dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{\sqrt{10}-\pi} = \dfrac{1}{0.02068500\cdots} = 48.344195\cdots$ ですので，$p = 49$ としてみると

$$\frac{153.93804002\cdots}{49} = \frac{49a}{49} = \frac{49\pi}{49} < \frac{\triangle}{49} < \frac{49\sqrt{10}}{49} = \frac{49b}{49} = \frac{154.95160534\cdots}{49}$$

となって，$\triangle = 154$ とすれば良いことがわかります[4]．

さて，一般的に証明する場合，分母 p を上のように決めたとして，分子 q はどのように記述すれば良いでしょうか．q は pa と pb の間となる整数ですから，**「pa の『整数部分』＋ 1」**とすれば良いのでは？と考えられます．整数部分というのは不正確な表現で，正しくはガウス記号 $[pa]$ を用いるのですが,「どんな実数も無限小数に表すことができる」ことは当たり前ではない現状で,「整数部分」というものがちゃんと考えられるのかというのは議論しなくてはいけません．そこで,（講義ではかなり唐突に）次の補題が登場するのです．

__**Lem.**__　$\forall a \in \mathbb{R}, \exists!\, m \in \mathbb{Z}$ s.t. $m \leq a < m+1$.

（この $m \in \mathbb{Z}$ を $[a]$ で表す．$[\ ]$ は**ガウス記号**と呼ばれる．また,「$\exists!$」は「ただ一つ存在して」の意味である.）

証明は前回の講義ノートをご覧ください，なお，$m \leq a < m+1$ を満たす m の一意性については（前回の講義で簡単に述べましたが）各自で証明してください．ガウス記号の性質として，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $a-1 < [a] \leq a$ が成立することに再度注意しておきます．これで最初の **Th.** を証明する準備が全て整ったことになるわけです．

__**Rem.**__ $m \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ を任意に取ったとき，$a = m-\varepsilon, b = m+\varepsilon$ に対して **Th.** を適用すると，二つの実数 $m-\varepsilon$ と $m+\varepsilon$ の間には必ず有理数 $x \in \mathbb{Q}$ が存在することが分かります．即ち，有理数の稠密性は

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in \mathbb{Q} \text{ s.t. } |m-x| < \varepsilon$$

と表現することもできます[5]．

問 次を示せ.

(1) **（演習問題 No.1 の問題 1.13，無理数の稠密性）** $a < b$ を満たす任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $x \notin \mathbb{Q}$ が存在して $a < x < b$ を満たす.

（ヒント：$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ を使います．**有理数**の稠密性から，$a-\sqrt{2}$ と $b-\sqrt{2}$ の間に有理数 x' が存在することが分かります．さて，x をどう定めれば良い？）

(2) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1$ かつ $x \notin \mathbb{Q}\}$ とおくと，$\sup A = 1$ である[6]．
（ヒント：(1) を用いる）

---

[3]このような $p \in \mathbb{N}$ が実際に存在することを厳密に示すために，**「$\mathbb{N}$ が上に有界でないこと」**または**アルキメデス性**が用いられます．そして，それらを示す際に，公理として認めた**実数の連続性**が用いられます！

[4]勿論，p が 49 より小さくても pa と pb の間に整数が存在する場合があるかもしれませんが,「$a < x < b$ を満たす $x \in \mathbb{Q}$ が一つでも存在すること」を証明したいわけですから，そんなことは気にしなくて良いのです（「$a < x < b$ を満たす $x \in \mathbb{Q}$ のうち最も分母が小さいもの」を求めたいわけではありません）.

[5]実際，この表現は **Th.** のそれと同値です.

[6]$A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ と書くこともできます.