解析学 I　補足プリント No.1　　（2024.6.6 配布）

プリントは http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6Kai1.html にも置いてあります.

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ がもつ性質として無条件に認めること **（公理）** は次の三つです.

① 四則演算ができる

平たく言えば，実数同士の足し算・引き算・かけ算・0 以外による割り算ができ，我々がよく使ういろいろな計算法則が成り立っているということです.

公理 1　$a, b \in \mathbb{R}$ ならば $a+b \in \mathbb{R}$, $a \times b \in \mathbb{R}$ であり（以後，$a \times b$ を ab と書く），次の性質を満たす.

(1) **（和の交換法則）** 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $a+b=b+a$ が成り立つ.
(2) **（和の結合法則）** 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して $(a+b)+c=a+(b+c)$ が成り立つ.
(3) **（0 の存在）** ある $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\theta + a = a$ が成り立つ[1]. この θ を 0 と書く[2].
(4) **（和の逆元の存在）** 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して $a+b=0$ を満たす. この b を $-a$ と書く[3].
(5) **（積の交換法則）** 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $ab=ba$ が成り立つ.
(6) **（積の結合法則）** 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して $(ab)c=a(bc)$ が成り立つ.
(7) **（1 の存在）** ある $k \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $ka=a$ が成り立つ. この k を 1 と書く[4].
(8) **（積の逆元の存在）** 0 を除く任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して $ab=1$ を満たす. この b を a^{-1} または $\dfrac{1}{a}$ と書く[5].
(9) **（分配法則）** 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して $(a+b)c=ac+bc$ が成り立つ.

さらに，$a+(-b)$ を $a-b$ と書き，ab^{-1} を $\dfrac{a}{b}$ と書く. この (1)〜(9) を満たす集合を**可換体**と呼ぶ.

四則演算に関するあらゆる法則は，すべて上の九つの性質から導かれます（例えば次のページの **問１** を参照）. ただ，存在を認めているのは四則演算だけですので，例えば平方根（$\sqrt{x}$）やべき乗（x^a），指数・対数関数（a^x, $\log_a x$），三角関数（$\sin x$ など）といった四則演算から構成することができないものは，本来はその存在を証明するまでは用いてはいけないわけです（講義・演習の中で後ほど存在を証明します）.

とはいえ，たとえ論理的にはそうであっても，平方根や指数・対数関数，三角関数が使えないというのは今後の学習においてとても不便ですので，**この講義・演習では**これらの存在を認め，使用して構わないこととします.

[1] この文章と,「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，ある $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $\theta + a = a$ が成り立つ」とは意味が異なることを確認しましょう. 順番が大事なのです！

[2] **実はこの一文には重大な問題点があります.** それは何かというと，このような条件を満たす θ は一つではないかもしれないのです. もし 二つや三つやそれ以上あったら，どれを 0 と書いていいか困ってしまいますね. しかし，(1) を用いると,「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\theta + a = a$ が成り立つ」という性質を満たす θ はただ一つであることが証明できます.

問：$\theta' \in \mathbb{R}$ が「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\theta' + a = a$ が成り立つ」という性質を満たすならば，$\theta' = 0$ である.

[3] このような b が一つしかないことも，(1)〜(9) の性質（のいくつか）を用いて示すことができます.

[4] このような k も一つしかないことが示せます.

[5] このような b も一つしかないことが示せます.

② 順序（大小関係）がある

順序（$\leqq, \geqq$）とは二つの数の大小関係を表す記号であり，既に与えられているものという印象がありますが，数学では集合に与えられる順序という用語にきちんとした定義があります．（このことは第 1 タームの数学概説で学習済みであると思います）

Def. X を集合とする．任意の $a, b \in X$ に対して $a \leq b$ と $b \leq a$ の少なくとも一方が成立していて，かつ次の三つの条件：

(1) **（反射律）** 任意の $a \in X$ に対して $a \leq a$ が成り立つ．
(2) **（反対称律）** 任意の $a, b \in X$ に対して，$a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$ が成り立つ．
(3) **（推移律）** 任意の $a, b, c \in X$ に対して，$a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$ が成り立つ．

が成立するとき，$\leq$ を X の上の**全順序**と呼ぶ[6]．また，下線部の条件を外したときは $\leq$ を X の上の**半順序**（または，単に**順序**）と呼ぶ．

また，$a \leq b$ と $b \geq a$ は同じ意味を表すこととし,「$a \leq b$ かつ $a \neq b$」であることを $a < b$ と書くことにします（$a > b$ も同様）．さて，$\mathbb{R}$ 上の順序に関してはさらに「単調性」と呼ばれる二つの性質を仮定します．

公理 2 $\mathbb{R}$ には全順序 $\leq$ が入っていて，次の二つを満たす．

(1) 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して，$a \leq b$ ならば $a + c \leq b + c$ が成り立つ．
(2) 任意の $a \geq 0,\ b \geq 0$ に対して $ab \geq 0$ が成り立つ．

③ 実数の連続性

①，②を満たす集合は $\mathbb{R}$ だけではありません．例えば，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ も同じ性質を満たしてしまいます．そこで，$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ を区別する性質が必要になるわけですが，それが次の「実数の連続性」と呼ばれる公理です．

公理 3 空でない $\mathbb{R}$ の**上に有界**な部分集合は，必ず**上限**をもつ．

「上に有界」「上限」といった用語が出てきましたが，それについては講義で説明します．

※以下の内容は解析学 I の試験には出題しませんが，数学的には大変重要な内容ですので一度は取り組んでみることをお勧めします．

問1 **公理 1** の (1)〜(9) のみを用いて次を示せ．

(i) 任意の $a \in \mathbb{R}$ と任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $x \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在して $b + x = a$ を満たす[7]．
(ii) 任意の $a \in \mathbb{R}$ と 0 でない任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $y \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在して $by = a$ を満たす[8]．
(iii) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$(-1)a = -a$ が成り立つ[9]．
(iv) 任意の $a \in \mathbb{R}$ と任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，$(-a)(-b) = ab$ が成り立つ．

[6] 高校までは $\leqq, \geqq$ という記号を用いてきましたが，大学の数学の本では $\leq, \geq$ で書かれている本が殆どです（むしろ外国では $\leq, \geq$ の方がスタンダードな記法です）．今後は解析学 I のプリントでも $\leq, \geq$ の方を用います．ただし，講義担当者の滝本が板書で書くときは $\leqq, \geqq$ を用います（←これは単に好き嫌いの問題）．
[7] 最初に「四則演算ができる」と言っておきながら足し算と掛け算のことしか述べていないので不安になった方がいるかもしれませんが，この (i) が「引き算ができる」ということを意味します．そして (ii) が……
[8] 「割り算ができる」ということです．
[9] 当たり前じゃん，と思う方が多いでしょうけど，実はこれはきちんと証明されることなのです！

$\boxed{\textbf{問2}}$ 順序 $\leq$ の定義と**公理 1**，**公理 2** のみを用いて次を示せ．

(i) 任意の $a > 0, b > 0$ に対して $ab > 0$ が成り立つ．
(ii) $1 > 0$.
(iii) 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して，$a \leq b$ かつ $c \geq 0$ ならば $ac \leq bc$ が成り立つ．
(iv) $a > 0$ ならば $\dfrac{1}{a} > 0$ が成り立つ[10].
(v) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $a^2 \geq 0$ が成り立つ．

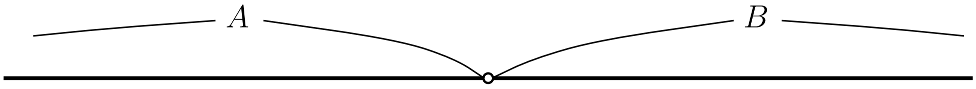
Rem.　我々は「実数というものが既に存在している」というスタンスで話を始めているわけですが，もちろん本当は何らかの方法で実数を構成しているわけです．有理数とその四則演算について既知であると仮定して実数を構成する方法として、次の二つを紹介します．

(1) デデキント (Dedekind) の切断による実数の構成[11]

有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を次の性質を満たすように二つの集合 A, B に分割します[12].

- $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$
- $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$
- $a \in A$, $b \in B \Longrightarrow a < b$

イメージ



このような組 $\langle A, B \rangle$ を**デデキント切断**と呼び，デデキント切断一つ一つを実数と定義します[13]．これらに四則演算をうまく定めることができ，そうすると先程挙げた①②③の性質は，公理ではなく**定理**（証明できるもの）となります[14].

(2) コーシー列による実数の構成

有理数からなる数列で**コーシー列**（定義は後に学びます）であるもの全体（これを S とおこう）を考えます．次にそのような数列 $\{a_n\}, \{b_n\} \in S$ に対して，$\{a_n\} \sim \{b_n\}$ であることを「$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$ を満たすこと」として定義すると，$\sim$ は S 上の**同値関係**になります．このとき，**商集合** $S/\sim$ の元一つ一つを実数と定義する，という方法もあります．

（もしかすると，今後 2 年生の数学通論 I の演習問題でコーシー列を用いた実数の構成に関する問題があるかもしれません）

---

[10]正確に言えば「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$a > 0$ ならば $\dfrac{1}{a} > 0$ が成り立つ」となりますが，通常はこのように略記します．

[11]デデキント (1831-1916) はドイツの数学者で，実数論の体系化を行うと共に，代数学にも大きな功績があります．

[12]高校では空集合を表す記号として ϕ を用いましたが，今後は $\emptyset$ という記号をよく用います．

[13]ここでは述べませんが，本当は少しだけ細工を施す必要があります．

[14]解析学 I の参考書として挙げた本の多くにはデデキントの切断の記述がありますので，興味ある方はご覧ください．また，デデキントの論文の邦訳が「数について　連続性と数の本質」（デーデキント著，河野伊三郎訳，**岩波文庫**）にあります．私（滝本）が中学生の時，書店の文庫本売場で偶然この本を見つけ購入した覚えがあります．当時はデデキントの切断など全く知らず言わんとしていることは結局わかりませんでしたが，今考えると数学の発展に大きく寄与した論文が（小説などと並んで）文庫として売られていることに驚くばかりです．