解析学 I 演習　小テスト No.1 解答・解説　（2024.6.7 出題）

1 次の (a)〜(e) を表す記号を，**選択肢**から一つずつ選んで答えよ．

(a) 自然数全体の集合　(b) 整数全体の集合　(c) 有理数全体の集合
(d) 実数全体の集合　(e) 複素数全体の集合

選択肢：

$\mathbb{A}$ $\mathbb{B}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{D}$ $\mathbb{E}$ $\mathbb{F}$ $\mathbb{G}$ $\mathbb{H}$ $\mathbb{I}$ $\mathbb{J}$ $\mathbb{K}$ $\mathbb{L}$ $\mathbb{M}$ $\mathbb{N}$ $\mathbb{O}$ $\mathbb{P}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{S}$ $\mathbb{T}$ $\mathbb{U}$ $\mathbb{V}$ $\mathbb{W}$ $\mathbb{X}$ $\mathbb{Y}$ $\mathbb{Z}$

[解答] (a) $\mathbb{N}$　(b) $\mathbb{Z}$　(c) $\mathbb{Q}$　(d) $\mathbb{R}$　(e) $\mathbb{C}$

コメント． これらの記号は世界中で共通認識となっており，今後数学を学ぶ上で基本的かつ重要なものです．早いうちに正しく記号を使えるようにしましょう．

2 次の命題の**否定**命題を書け．なお，解答の際に論理記号を用いてもよいが，否定を表す論理記号 $\neg$ を用いてはいけない．

(1) ある有理数 x が存在して $x^2 = 2$ である．

(2) 任意の実数 a に対して，ある整数 m が存在して $m \leq a < m+1$ である．

(3) 理学部数学科の学生の誕生日はすべて異なる．

(4) どの学校にも，校則を破ると怒る先生がいる．

[解答] (1) 任意の有理数 x に対して $x^2 \neq 2$ である．($\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2$)

(2) ある実数 a が存在して，任意の整数 m に対して「$m > a$ または $a \geq m+1$」である．
($\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall m \in \mathbb{Z}, \big(m > a \ \vee \ a \geq m+1\big)$)

(3) 理学部数学科には誕生日が同じ学生が少なくとも 1 組存在する．

(4) 校則を破ってもどの先生も怒らないような学校が（少なくとも 1 校）存在する．

注意． 命題の意味を正しく理解したり，否定命題や対偶命題を正しく作ったりすることは，数学を学ぶ上での基本ですので，間違えた方はしっかり復習してください．なお，(1) の元の命題は偽，(2) の元の命題は真です（従って，(1) の否定命題は真，(2) の否定命題は偽です）．

(2) の答えを「$\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\boxed{m > a \geq m+1}$」と書いた人がいましたが，そうではありません（不等式の否定 → 不等号の向きを逆さにする！……ではありません）.「$m \leq a < m+1$」というのは「$m \leq a$ **かつ** $a < m+1$」ということですから，その否定は「$m > a$ **または** $m \geq a+1$」となります．なお,「または」を表す論理記号は「$\vee$」であって,「$\cup$」ではありません．

(3) は「理学部数学科の学生は全員誕生日が異なる」という状況があると仮定して，それを否定するにはどういう状況があればよいかを考えてみるとよいでしょう.「…誕生日が同じ人がいる」という答案が多く見られました．日本語として十分通じますが，**「自分と誕生日が同じ人がいる」**という違った意味も含まれるので，添削では敢えて△にしました．

論理記号を用いて考えてみましょう．この理学部数学科の学生全体の集合を A とすると，

$$\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ \big(x \neq y \ \Rightarrow (x \text{ の誕生日}) \neq (y \text{ の誕生日})\big)$$

となります．この否定を考えれば，

$$\exists x \in A,\ \exists y \in A \text{ s.t. } \big(x \neq y \ \wedge\ (x \text{ の誕生日}) = (y \text{ の誕生日})\big)$$

となり，日本語に直せば上のような解答が得られます．

(4) は,「どの学校にも，校則を破ったならば怒る先生がいる」は論理記号を用いて

$$\forall A\text{: 学校},\quad \exists x\text{: } A \text{ の先生 s.t. } \big((A \text{ の生徒が校則を破る}) \Rightarrow (x \text{ は怒る})\big)$$

と表すことができます．これを否定すると，

$$\exists A\text{: 学校 s.t. } \forall x\text{: } A \text{ の先生}, \big((A \text{ の生徒が校則を破る}) \wedge (x \text{ は怒らない})\big)$$

です．日本語に直訳すると**「ある学校が存在して，任意の先生は校則を破っても怒らない」**となります．もちろんこれでも正解ですが，より自然な日本語にすると上のような解答が得られます．

3 次の極限値を求めよ（答えだけでよい）

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n-4^{n+1}}{2^{2n}-3^{n+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

[解答] (1)

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n} &= \frac{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}\\ &= \frac{3n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}\\ &= \frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\\ &\to \frac{3}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \underline{\frac{3}{2}} \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\frac{(-2)^n-4^{n+1}}{2^{2n}-3^{n+1}} = \frac{(-2)^n-4\cdot 4^n}{4^n-3\cdot 3^n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n-4}{1-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n} \to \frac{0-4}{1-3\cdot 0} = \underline{-4}\ (n\to\infty)$

(3) 任意の $x>0$ に対して $\displaystyle -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ であるから，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \underline{0}$.

(4) $f(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2$ とおくと，$f'(x) = e^x - x$, $f''(x) = e^x - 1$ である．$x>0$ ならば $f''(x)>0$ であり，$f'(0)=1$ であるので，任意の $x\geq 0$ に対して $f'(x)\geq f'(0)=1>0$ である．また，$f(0)=1$ であるので，任意の $x\geq 0$ に対して $f(x)\geq f(0)=1>0$ である．従って，任意の $x>0$ に対して $\displaystyle 0<\frac{x}{e^x}\leq\frac{x}{\frac{1}{2}x^2}=\frac{2}{x}$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \underline{0}$.

(5) （高校では） $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ と定義した．$n \to \infty$ のとき $\frac{1}{n} \to 0$ であるので，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}}} = \underline{e}.$$

注意． 上の解答では，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ $(r\in(-1,1))$, $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ やはさみうちの原理などが用いられていますが，これらを含めて数列・関数の極限に関する性質はすべて解析学 I で証明されます．

因みに，(3) の答えを 1 と書いた人がいましたが，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ とごっちゃになったのでしょうか……．

4 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ．

［証明］ 背理法で示す．$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ であると仮定する．すると

$$\exists p\in\mathbb{N},\ \exists q\in\mathbb{Z} \text{ s.t. } \sqrt{2}=\frac{q}{p}$$

が成り立つ．このとき，$\sqrt{2}>0$ かつ $p>0$ であるので，$q>0$ である（即ち，$q\in\mathbb{N}$ である）．p と q は互いに素であると仮定してよい．このとき，

$$q = p\sqrt{2}.$$
$$\therefore\ q^2 = 2p^2. \qquad \cdots\cdots(*)$$

したがって，q^2 は 2 の倍数である．よって，q も 2 の倍数であるので，

$$\exists q'\in\mathbb{N} \text{ s.t. } q=2q'$$

が成り立つ．この q' に対して，$q=2q'$ の両辺を 2 乗すると，

$$q^2 = 4(q')^2.$$

この式と $(*)$ から，

$$p^2 = 2(q')^2.$$

したがって p^2 は 2 の倍数，よって p も 2 の倍数である．故に，p と q は公約数 2 を持つことが分かるが，これは p と q が互いに素であることに矛盾する．

以上の結果，$\sqrt{2}$ は無理数であることが示された． ■

コメント． 全体的な出来は良かったですが，新たな記号を持ち出したときに**その記号が何を表しているのか**（整数？自然数？）が書かれていない答案が多かったのが気になりました．今のうちに「証明の書き方」をしっかりと学んでおきましょう．

注意． さて，そもそも「$\sqrt{2}$」という数は存在するのでしょうか？ $\sqrt{2}$ とは「$x^2=2$ かつ $x>0$ を満たす x」のことですが，**4** で証明されたのは「もし $\sqrt{2}$ という数が存在するのであれば，それは有理数ではない」ということであり，$\sqrt{2}$ という数が存在することは示せていません．演習問題 No.1 の**問題 1.12** を解くことでようやくその存在が分かります（実際には $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2<2\}$ として $a=\sup A$ とおく方がより素直です）．しかし，**問題 1.12** は原始的な方法でして，より一般的な方法で（連続関数の性質を用いて）べき根・指数関数・対数関数を定義します（7 月後半頃になる予定です）．

さて，「$x^2=2$ かつ $x>0$ を満たす x」が**ただ一つ**であること **（一意性）** は示せますか？（←もしもそのような x が二つあったらマズいですよね……）