小問について，(1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが，(a), (b), ……と付いたものはまとめて発表して下さい．また, 単に「級数の収束・発散を調べよ」と言ったときは, 収束する場合も級数の和は求めなくても構いません.

◇ 割り当て問題 以下の問題では、講義・演習で学んだ内容は既知としてよい。

問題 4.1（比較判定法）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ を級数とする。

(a) ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$n \geq N_0$ ならば $|a_n| \leq b_n$ とする。このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束することを示せ。

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数で収束すると仮定する。このとき、1 以上の任意の実数 r に対して、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^r$ が収束することを (a) を用いて示せ。

問題 4.2 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ を正項級数であって、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ を満たすとする[1]。このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が発散するならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も発散することを示せ。

問題 4.3[2]　数列 $\{a_n\}$ を、$a_n = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} & (n : \text{奇数}) \\ \frac{1}{n^n} & (n : \text{偶数}) \end{cases}$ で定まる数列とする。

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$ を示せ。

(b) 数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ は発散することを示せ。

問題 4.4 次の級数の収束・発散を調べよ。

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ $(a > 0)$,　(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

問題 4.5 (a) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \cos\frac{1+3n}{3}\pi}$ の収束・発散を調べよ。

(b) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n + \cos\frac{1+3n}{3}\pi}$ の収束・発散を調べよ。

◇ 自由発表問題

問題 4.6 次の級数の収束・発散を調べよ。ただし、$r, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \theta_1 \in (0, \pi], \theta_2 \in [0, 2\pi)$ とする。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{rn}$ $(r \neq 0)$,　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$,　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$,　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-\sqrt{2})}$,　(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\sqrt{n}}$,

---

[1]「任意の $n \in \mathbb{N}$」を「ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、N_0 以上の任意の $n \in \mathbb{N}$」に置き換えても結論は変わらない。

[2]問題 2.14 で、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、「$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$ (または > 1) ならば、$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ となる」ことを示していた。この問題は、括弧内の命題の逆の命題の反例を与えている。つまり、正項級数の収束・発散の判定問題において、（理論上）ダランベールの判定法で判定することができる級数は、コーシーの判定法を用いても判定できるが、コーシーの判定法で判定できるものの中には、ダランベールの判定法で判定できない級数が存在する。

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\alpha+n\theta_1)$, (7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta_2)}{n}$, (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\theta_2}{n}$, (9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n^2+n+1}$.

問題 4.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ を級数とし、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$c_n=\displaystyle\sum_{m=1}^{n}a_m b_{n+1-m}$ とする。このとき、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ を級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ の積という。

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ は絶対収束するとし、その和はそれぞれ実数 α, β であるとする。

(1) 任意の $m\in\mathbb{N}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{m}|c_n|\leq\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{m}|b_n|\right)$ を示せ。

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ は絶対収束し、その和は $\alpha\beta$ であることを示せ。

(3) r を実数で、$|r|<1$ とする。このとき、(2) の事実を用いて、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n-1}$ が収束することを示し、その和を求めよ。

問題 4.8 [3] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は条件収束する級数とする。このとき、数列 $\{a_n\}$ の全ての正の項からなる部分列を $\{b_n\}$、全ての 0 以下の項からなる部分列を $\{c_n\}$ とする[4]。

(1) 任意の $l\in\mathbb{N}$ に対して、ある $m(l)\in\mathbb{N}$ が存在して「$-\displaystyle\sum_{n=1}^{l}c_n\leq\sum_{n=1}^{m(l)}b_n=b_1$（すなわち $m(l)=1$）」または、「$m(l)\geq 2$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{m(l)-1}b_n<-\sum_{n=1}^{l}c_n\leq\sum_{n=1}^{m(l)}b_n$」となる。特に、このような $m(l)$ は、一意的である[5]。

以下、$l\in\mathbb{N}$ に対して、$m(l)$ とかくと、(1) の条件を満たす自然数 $m(l)$ を指すものとする。

(2) 数列 $\{m(l)\}_{l\in\mathbb{N}}$ は（上に）有界でない単調増加数列であることを示せ。

(3) $s_l=\displaystyle\sum_{n=1}^{m(l)}b_n+\sum_{n=1}^{l}c_n$ とする。このとき、数列 $\{s_l\}$ は 0 に収束することを示せ。

(4) 数列 $\{d_n\}$ を、$c_1, b_1, \ldots, b_{m(1)}, c_2, b_{m(1)+1}, \ldots, b_{m(2)}, c_3, b_{m(2)+1}, \ldots, b_{m(3)}, \ldots, c_l, b_{m(l-1)+1}, \ldots, b_{m(l)}, \ldots$ で定まる数列とする (ただし、$m(l)=m(l+1)$ の場合には、$\ldots, b_{m(l-1)}, c_l, b_{m(l-1)+1}\cdots, b_{m(l)}, c_{l+1}, c_{l+2}, \ldots$ とする[6])。このとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ は 0 に収束することを示せ。また、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の項を入れ替えて得られる級数であることを示せ。

---

[3] この問題は、条件収束する級数は、和をとる順番を適切に入れ替えていくことで、0 に収束するようにできることを示している。この問題の (1) の不等式に現れる $-\displaystyle\sum_{n=1}^{l}c_n$ を $r-\displaystyle\sum_{n=1}^{l}c_n$ ($r\in\mathbb{R}$) に変え、(3)、(4) の「0 に収束する」を「r に収束する」に読み替えた命題を示すことで、r に収束するような順序の入れ替えが存在することがわかる。では、正の無限大に発散することを示すためにはこの問題をどのように読み変えれば良いだろうか？

[4] 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n, \sum_{n=1}^{\infty}c_n$ は、それぞれ正の無限大、負の無限大に発散することは証明せずに用いてよい。（講義のレポート問題 No. 5 問 2 参照）

[5] すなわち、$m(l), m'(l)$ が共に (1) の条件を満たすならば、$m(l)=m'(l)$ となる。

[6] 例えば $\{d_n\}$ は、$1=m(1)=m(2)<m(3)<\cdots$ の場合は、$c_1, b_1, c_2, c_3, b_2, \ldots, b_{m(3)}, c_4, \ldots$ であり、$1<m(1)<m(2)=m(3)<\cdots$ の場合は、$c_1, b_1, \ldots, b_{m(1)}, c_2, b_{m(1)+1}, \ldots, b_{m(2)}, c_3, c_4, \ldots$ である。