解析学 I 演習　演習問題 No.3 （2024.6.21 配布）

小問について，(1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが，(a), (b), ……と付いたものはまとめて発表して下さい．

◇ 割り当て問題 以下の問題では講義・演習で学習した内容や $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ などを既知とする．

問題 3.1 $a > 0$ を定数とする．

(a) $a > 1$ と仮定する．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq a$ を示せ．（ヒント：二項定理）

(b) $a > 1$ と仮定する．**はさみうちの原理**と (a) の結果を用いて，極限値 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ を求めよ．

(c) $0 < a \leq 1$ と仮定する．極限値 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ を求めよ．

（ヒント：$0 < a < 1$ のとき，$b = \frac{1}{a}$ とおくと $b > 1$ です）

問題 3.2 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列，$\alpha > 0$ を定数とし，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ であるとする．

(a) 「$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N_1 \Longrightarrow a_n > \frac{\alpha}{2}$」が成り立つことを示せ．

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$ が成り立つことを示せ．

問題 3.3 上に有界でない単調増加数列は ∞ に発散することを示せ．
（同様に，下に有界でない単調減少数列は $-\infty$ に発散することが示せる）

問題 3.4 数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に収束するならば，任意の部分列 $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ も α に収束することを示せ．
（同様に，$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ が ∞ $(-\infty)$ に発散するならば，部分列 $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ も ∞ $(-\infty)$ に発散することが示せる）

問題 3.5 (a) r を $|r| < 1$ を満たす定数とする．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ の和を求めよ．

（第 n 部分和を計算し，その極限を求めよ）

(b) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するならば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ も収束し，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が成り立つことを示せ．

◇ 自由発表問題

問題 3.6 $\{a_n\}$ を数列，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ が成り立つことを示せ．

(b) 「$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$」が成り立つことを示せ．

(c) r を $|r| \geq 1$ を満たす定数とする．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ は発散することを示せ．

問題 3.7 $\{a_n\}$ を数列とする．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \infty$ であることを示せ．

(2) (1) の逆の命題は偽であることを示せ．

（裏面に続く）

問題 3.8 次の極限を調べよ．ただし，(1) では a, b を正定数とし，(2), (3) では r を $r > 1$ を満たす定数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}}$.　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{r^n}$.　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!}$.　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(n!\right)^{\frac{1}{n^2}}$.　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$.

問題 3.9 次で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束する部分列をもつか否かをそれぞれ判定せよ．

(1) $a_n = n\sin\dfrac{\pi n}{3}$.　(2) $a_n = n\cos\dfrac{\pi n}{3}$.　(3) $a_n = (-3)^n$.　(4) $a_n = \sin n$.

(5) $a_n = 3^n + (-3)^n + \sin n$.

問題 3.10 漸化式 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ で定義される数列 $\{a_n\}$ は有界な単調数列であることを示し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

問題 3.11（算術幾何平均） $p > q > 0$ を定数とする．漸化式 $a_1 = p,\ b_1 = q,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ で定義される数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を考える．

(1) $\{a_n\}$ は単調減少，$\{b_n\}$ は単調増加であり,「$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > b_n > 0$」が成り立つことを示せ．

(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともに収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ であることを示せ[1]．

問題 3.12 数列 $\{a_n\}$ が

$$\exists r \in (0, 1) \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N},\ |a_{n+2} - a_{n+1}| \le r|a_{n+1} - a_n| \qquad \cdots\cdots(*)$$

を満たすとする．このとき，$\{a_n\}$ はコーシー列である（従って，$\{a_n\}$ は収束する）ことを示せ[2]．

問題 3.13 漸化式 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2 + a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ で定義される数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

問題 3.14 次の命題 (a)〜(c) の真偽をそれぞれ判定せよ．理由（証明）も付けること．

(a) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束し，かつ $a_n \le b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たすならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が成立する．

(b) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束し，かつ $a_n < b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たすならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が成立する．

(c) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束し，かつ数列 $\{a_n\}$ が $a_n \le b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たすならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

---

[1] この極限値を p と q の**算術幾何平均**と呼びます.（実際には $p > q$ という条件は不要でして，$p > 0,\ q > 0$ に対して p と q の算術幾何平均が定義されます）

$p = 1,\ q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおいて数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を考え，$c_n = \dfrac{(a_n + b_n)^2}{1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}(a_k - b_k)}$ とおくと，ガウス–ルジャンドルの公式により $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \pi$ であることが知られています．これは円周率 $\pi\,(= 3.141592653589\cdots)$ の高速計算法の一つとなっています（因みに，$c_1 = 3.1876\cdots$, $c_2 = 3.141680\cdots$, $c_3 = 3.14159265389\cdots$ です）.

[2] 条件 $(*)$ を満たす数列を**縮小列**と呼びます.