　小問について，(1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが，(a), (b), ……と付いたものはまとめて発表して下さい.

◇ 割り当て問題

問題 2.1 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2}$ で定める。このとき、数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束することを定義に従って示せ。

問題 2.2 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ で定める。このとき、数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散することを定義に従って示せ。

問題 2.3 $\alpha \in \mathbb{R}$ とし、$\{a_n\}$ を数列とする。このとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \alpha$ ならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示せ。

問題 2.4 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は数列であって、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n \leq b_n$ を満たすとする。このとき $\{a_n\}, \{b_n\}$ がともに収束するならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ となることを示せ。

問題 2.5 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ をそれぞれ $a_n = -\dfrac{1}{n}, b_n = \dfrac{1}{n}$ で定める。また c_n を、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n < c_n < b_n$ を満たす実数とする。このとき、数列 $\{c_n\}$ は 0 に収束することを示せ。

◇ 自由発表問題

　以下、極限を調べるとは、数列の収束、発散（$+\infty, -\infty$, 振動）を（定義に従って）判定することとする。（ただし、振動とは、発散する数列のうち、正または負の無限大に発散しないものである。）

問題 2.6 $\{a_n\}$ を数列とし、$\alpha \in \mathbb{R}$ とする。このとき、以下の三条件が同値であることを示せ。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| \leq \varepsilon$,

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$.

問題 2.7 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする。このとき「$\forall \varepsilon > 0, |\alpha - \beta| < \varepsilon \Leftrightarrow \alpha = \beta$」を示せ。また、この事実を用いて、任意の数列 $\{a_n\}$ に対して、数列 $\{a_n\}$ が収束するならば極限値は一意的であることを示せ。

問題 2.8 $\alpha, \beta, r \in \mathbb{R}$ とし、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ はそれぞれ、α, β に収束すると仮定する。このとき

(1) 数列 $\{a_n + rb_n\}$ は $\alpha + r\beta$ に収束することを定義に従って示せ。

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n > 0$ かつ $\alpha \neq 0$ とする。このとき、数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は $\dfrac{1}{\alpha}$ に収束することを定義に従って示せ。

問題 2.9 $\alpha \in \mathbb{R}$ とし、数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \alpha^n$ で定める。このとき、数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ。

（裏面に続く）

問題 2.10 次の数列 $\{a_n\}$ について、極限を調べよ[1]。

(1) $a_n = \dfrac{2n^2-3n+1}{6n^2+3n-3}$. (2) $a_n = \dfrac{r^n}{n!}$ $(r \in \mathbb{R})$. (3) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{3n+1}$.
(4) $a_n = n\sin\dfrac{2n\pi}{3}$. (5) $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$. (6) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

問題 2.11 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は数列であって、$a_n \leq b_n$ を満たすとする。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ ならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ となることを示せ。

問題 2.12 $\{a_n\}$ を数列とする。また、$r \in \mathbb{R}$ を $0 \leq r < 1$ とする。このとき、「「$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq N \Rightarrow |a_{n+1}| \leq r|a_n|)$」$\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$」を示せ。

問題 2.13 $\{a_n\}$ は数列であって、$a_n > 0$ を満たすとする。また、数列 $\{b_n\}$ を $b_n := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ で定め、数列 $\{b_n\}$ は正の無限大に発散すると仮定する。このとき、任意の数列 $\{c_n\}$ と任意の実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して、「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = c$」を示せ。

問題 2.14 数列 $\{a_n\}$ は、$a_n > 0$ を満たすとする。このとき、ある正の実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して、「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$」を示せ。[2]

問題 2.15（フィボナッチ数列） 数列 $\{a_n\}$ を、漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ で定まる数列とする。

(1) $a_1 = a_2 = 1$ とする。このとき、数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ。

(2) $a_1 = a_2 = 1$ とする。このとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n > 0$ を示せ。また、$b_n := \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ とする。数列 $\{b_n\}$ の極限を調べよ。

(3) a_1, a_2 を正の実数とする。また、数列 $\{b_n\}$ を (2) と同様に定める。このとき、数列 $\{b_n\}$ の極限を調べよ。

問題 2.16 Seq を実数列[3]の全体とし、$\mathrm{Hom}_{Set}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ を自然数全体の集合から実数全体の集合への写像の全体とする。また

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{Set}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Seq}\ ; f \mapsto \{f(n)\}$$

とする。φ が全単射であることを示せ。

[1]問題 2.7 以降がヒントになっている問題もある。

[2] $\sqrt[n]{\alpha}$ は次のように定義されるものとする。$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^n < \alpha\}$ とする。すると、問題 1.12 と同様に、集合 A は上限を持つことが示せる。この集合 A の上限 $\sup A$ を $\sqrt[n]{\alpha}$ と定義する。このとき、$\sqrt[n]{\alpha} > 0$ かつ $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ であることを注意しておく。（こちらも問題 1.12 と同様に示すことができる。）

[3]実数列とは、数列 $\{a_n\}$ であって、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n \in \mathbb{R}$ となるもののこと。今回の講義、演習では単に数列というと実数列のことを指している。