解析学 I 演習　演習問題 No.1　　（2024.6.7 配布）

小問について，(1), (2), ……と付いたものは小問ごとに発表して構いませんが，(a), (b), ……と付いたものはまとめて発表して下さい．

◇ 割り当て問題

問題 1.1 $A = \left\{ \dfrac{1-2n}{2+n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく．次を示せ．

(a) -2 は A の下界である．　(b) -1 は A の下界では**ない**．　(c) A は上に有界である．

問題 1.2 A, B を空でない $\mathbb{R}$ の部分集合とする．もし A, B が上に有界ならば，$A \cup B$ も上に有界であることを示せ．

（同様に，A, B が下に有界ならば，$A \cup B$ も下に有界であることが示せる）

問題 1.3 A を空でない $\mathbb{R}$ の部分集合とする．もし A の最大値が存在するならば，$\sup A = \max A$ であることを示せ．

（同様に，A の最小値が存在するならば，$\inf A = \min A$ であることが示せる）

問題 1.4 $A = (-10, \infty)$ とおく．$\inf A = -10$ であること，および $\min A$ は存在しないことを示せ．

問題 1.5 $A = (1, 2] \cup (3, 4] \cup (5, 6]$ とおく．$\sup A$ および $\inf A$ を求めよ．

◇ 自由発表問題

問題 1.6 集合 A, B を $A = \left\{ \dfrac{2}{2n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, $B = \left\{ \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ と定める．次の各命題が真であるか偽であるかを，理由を付けて答えよ．

(a) 任意の $a \in A$ と任意の $b \in B$ に対して，$a < b$ である．
(b) 任意の $a \in A$ に対して，ある $b \in B$ が存在して $a > b$ となる．
(c) ある $a \in A$ が存在して，任意の $b \in B$ に対して $a \leq b$ である．
(d) ある $b \in B$ が存在して，任意の $a \in A$ に対して $a \leq b$ である．

問題 1.7 A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．次の (i) と (ii) が同値であることを示せ．

(i) A は有界である．（即ち，A は上に有界かつ下に有界である）
(ii) $\exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \in A,\ |x| \leq M$.

（裏面に続く）

問題 1.8 次の集合が，(i) 有界である，(ii) 上に有界であるが，下に有界でない，(iii) 下に有界であるが，上に有界でない，(iv) 上に有界でなく，下に有界でない，のいずれであるかを，理由を付けて答えよ[1].

(1) $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. (2) $B = \{x^2 - 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. (3) $C = \{x^2 - 2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$.

(4) $D = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. (5) $E = \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. (6) $F = \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

(7) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^9 - 6x^8 + 5x - 1 \leq 0\}$
（ヒント：$x \geq 6$ ならば $x^9 - 6x^8 + 5x - 1 > 0$ であることを示す）

問題 1.9 $A = \left\{ \dfrac{1}{3n-1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく.

(1) A の最大値および上限を（存在するならば）求めよ.

(2) A の最小値および下限を（存在するならば）求めよ.

問題 1.10 (1) $A = \left\{ \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{4^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく．A の上限と下限を求めよ.

(2) $B = \left\{ \dfrac{1}{2^m} - \dfrac{1}{4^n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく．B の上限と下限を求めよ.

問題 1.11 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A, B と $k \in \mathbb{R}$ に対して

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}, \quad kA = \{ka \mid a \in A\}$$

と定義する．例えば，$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ならば，$2A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ である.

A, B が上に有界であるとき，次が成り立つことを示せ.

(1) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. (2) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(3) $k \geq 0$ ならば，$\sup(kA) = k \sup A$. (4) $k < 0$ ならば，$\inf(kA) = k \sup A$.

問題 1.12 $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ とおく．A は上限をもつが最大値をもたないことを示し，$a = \sup A$ とおくと，$a > 0$ かつ $a^2 = 2$ を満たすことを示せ[2].

問題 1.13（無理数の稠密性） 任意の $a < b$ を満たす $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，$a < q < b$ を満たす無理数 $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在することを示せ.

---

[1] イメージや関数のグラフを書くだけでは不十分です．もちろん，講義で学ぶ定理・命題を用いることは構いません（例えば，$\mathbb{N}$ **が上に有界でないこと**や**ガウス記号**などを今後の講義で学習することでしょう）.

[2]「$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ だから」では証明になりません．この問題により「$\sqrt{2}$（$a > 0$ かつ $a^2 = 2$ を満たす実数 a）の存在」が証明されます.