基本群への外 Galois 表現とその Lie 環化*

松本　眞†

平成 22 年 4 月 7 日

目 次

概 要

X を体 K 上幾何的連結なスキームとすると、K の絶対ガロア群 G_K が $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X \otimes \overline{K}, \overline{x})$ に modulo 内部作用で、作用する。この講義では、

1. この作用はトポロジーで言うところの「変形族におけるモノドロミー」であること
2. この作用はガロア群の表現として豊かな情報を含むこと
3. ある種の情報 (extension の情報、「モチーフ」情報）を取り出すために、群のリー環化が有効であること

の三つを軽薄に解説する。

*このノートは、２００４年整数論サマースクールの講義ノートをベースにしている。

†東京大学数理科学研究科 matumoto at-mark ms.u-tokyo.ac.jp

1 代数的基本群

代数的基本群 (algebraic fundamental group) は、数論的基本群 (arithmetic fundamental group) とも言う。連結スキーム X とその幾何的点 x が与えられると、$\pi_1^{\mathrm{alg}}(X,x)$ という profinite 群が定義される。

定義には、スキーム[1]の射が etale である、という概念が本質的 [1, I]。

定義 1.1. 有限型の射 $f : Y \to X$ が点 $y \in Y$ で etale であるとは flat かつ不分岐なこと。つまり、局所化 $\mathcal{O}_{f(y)} \to \mathcal{O}_y$ が flat で、局所化上のファイバー

$$\mathcal{O}_{f(y)}/m_{f(y)} \to \mathcal{O}_y/m_{f(y)}\mathcal{O}_y$$

が有限次分離拡大であること。

f が etale であるとは、Y 上の全ての点で etale なこと。f がさらに finite かつ全射であるとき、$f : Y \to X$ を finite etale 被覆という。

例えば、$f(t)$ をモニック $\mathbb{Z}$ 係数多項式とすると

$$\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[t]/f(t) \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$$

は finite かつ flat である。$\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ の素点 (p) 上の fiber は $\mathrm{Spec}\mathbb{F}_p[t]/(\bar{f}(t))$ である。$\bar{f}(t)$ を $\mathbb{F}_p$ 上モニック既約多項式のべきに因数分解して

$$\bar{f}(t) = \Pi \bar{f}_i(t)^{e_i}$$

としたとき、この fiber 上の点は $\mathbb{F}_p[t]/(\bar{f}_i(t)^{e_i})$ であり、それが不分岐であるとは $e_i = 1$ であることと同値である。

事実 1.2. K を標数 0 の体とし、埋め込み $K \subset \mathbb{C}$ を一つ決めたとする。このとき、K 上の有限型スキーム X に対し、その複素数有理点の集合 $X(\mathbb{C})$ を対応させることで

$$\mathrm{an} : K \text{ 上有限型スキームの圏} \to \text{複素解析的集合の圏}$$

なる関手ができる。(本稿では特異点がないときしか扱わない。そのときは「代数多様体 X を複素多様体 X^{an} だと思う」という関手とみなしてよい。)

K が代数閉体であるとすると上の関手は任意の有限型スキーム X に対し

X の finite etale 被覆の圏
$\to X^{\mathrm{an}}$ の（複素解析的な意味での）有限次不分岐被覆の圏

[1] 本講義では、スキームは全て局所ネーターであると仮定する。この仮定の必要性を指摘くださった安田正大さんに感謝する。

なる圏同値を引き起こす。（Grothendieck の Riemann 存在定理、[1, XII, Th.5.1]。）

つまり、K が標数 0 の代数閉体である場合には、X の有限次不分岐被覆と X^{an} のそれとは同型を除いて一対一に対応する。

この事実により、次の比較定理 [1, XII, Cor.5.2] がわかる。

定理 1.3. (比較定理) $K \subset \mathbb{C}$ を代数閉体とし、X を局所的に有限型で連結な K 上のスキームとし、x を X の $\mathbb{C}$ 有理点とする。すると、同型

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(X, x) \cong \pi_1(X^{\mathrm{an}}, x^{\mathrm{an}})^{\widehat{}}$$

が成立する。

この式にあらわれた登場人物を解説するのがこの章の第一の目的である。上の式の左辺が代数的基本群（後述）である。右辺の $\pi_1(X^{\mathrm{an}}, x^{\mathrm{an}})$ は通常の道で定義した基本群である。肩に乗っている$\widehat{}$は、profinite 完備化（後述）を表す。

簡単のため、X が非特異であるときのみを扱う。X^{an} は連結複素多様体で x^{an} はその点であるから、道のホモトピー類で定義されたいわゆる普通の基本群

$$\pi_1(X^{\mathrm{an}}, x^{\mathrm{an}})$$

がある。代数的基本群は、これを純代数幾何的に定義しようというものである。「道」という実数的なものを使った定義はうまくいかず、普遍被覆を使った定義がうまく行く。

普通の道の合成の順序は、関数合成の順序と一致させておく。すなわち、$\gamma \circ \gamma'$ は、γ' ですすんでそのあと γ ですすむという道である。

定義 1.4. S を連結位相空間とする。連続写像 $f : T \to S$ が S の（不分岐）被覆であるとは、S の勝手な点にある近傍 U が存在して $f^{-1}(U)$ の各連結成分が f により U と同相となること。

S の被覆であって単連結なものを普遍被覆といい $\tilde{S}$ であらわす。（S に連結実多様体の構造が入る場合、S の普遍被覆は存在する。）

$$\rho_{\tilde{x}} : \pi_1(S, x) \cong \mathrm{Aut}(\tilde{S}/S)^{\mathrm{op}}.$$

なる群同型がある。

ここで、$\mathrm{Aut}(\tilde{S}/S)$ というのは $\tilde{S}$ の S 上の自己同相のなす群、肩の op は積の順序を逆にした群をあらわす。

上の群同型を与えよう。x 上の点 $\tilde{x} \in \tilde{S}$ を固定する。$\gamma \in \pi_1(S, x)$ を任意にとる。$\tilde{x}$ を始点とする $\tilde{S}$ 上への持ち上げを $\tilde{\gamma}$ とするとき、その終

点 $\tilde{x}_\gamma$ は x 上の点である。普遍被覆の性質より $\tau \in \mathrm{Aut}(\tilde{S}/S)$ であって $\tau(\tilde{x}) = \tilde{x}_\gamma$ となるものが唯一つ存在する。対応 $\gamma \mapsto \tau$ は (contravariant) 群準同型になる。contravariant になることを説明しよう。$\gamma \circ \gamma'$ の計算を行う。$\gamma \mapsto \tau, \gamma' \mapsto \tau'$ としよう。

$\tilde{x}$ を始点とした γ' の持ち上げである道での終点、その終点を始点とした γ の持ち上げである道の終点、を次々に計算し、最後のものが

$$\tau' \circ \tau(\tilde{x})$$

となることを言えばよい。

さて、τ' の定義により γ' の持ち上げで始点を $\tilde{x}$ としたものは

$$\tilde{x} \xrightarrow{\gamma'} \tau'(\tilde{x})$$

とつながる。同様に、γ の持ち上げで始点を $\tilde{x}$ としたものは

$$\tilde{x} \xrightarrow{\gamma} \tau(\tilde{x})$$

とつながる。しかし欲しいのは上の終点である $\tau'(\tilde{x})$ を始点とする γ の持ち上げの終点である。τ' は局所同型であるから、そのような持ち上げは下の式を一斉に τ' で変換して得られる。すなわち

$$\tau'(\tilde{x}) \xrightarrow{\gamma} \tau' \circ \tau(\tilde{x})$$

となる。これは、

$$\gamma \circ \gamma' \mapsto \tau' \circ \tau$$

を示している。($\gamma \mapsto \tau$ の定義を変えて τ^{-1} を対応させれば群準同型となる。が、上のような定式化をするのがよい。ガロア圏で定式化するとそれがクリアになる。)

全射性は $\tilde{S}$ が弧状連結であるから言える。単射性は $\tilde{S}$ の単連結性から従う。

そこで、$\tilde{S}, \tilde{x}$ を一つ選んだとき

$$\pi_1(S, x) := \mathrm{Aut}(\tilde{S}/S)^{\mathrm{op}}$$

としてやればよい。右辺の定義から x が消滅してしまっているが、π_1 を関手として定義するときには必要になる。すなわち、$(S_1, x_1) \to (S_2, x_2)$ から $\mathrm{Aut}(\tilde{S_1}/S_1) \to \mathrm{Aut}(\tilde{S_2}/S_2)$ を決めなくてはならないが、これは $\tilde{x}_1 \mapsto \tilde{x}_2$ となる唯一の $\tilde{S}_1 \to \tilde{S}_2$ とコンパチブルになるように定義するのである。(本当は、ファイバー関手の言葉を使うとより明確になる。S 上の点 x はファイバー関手を与え、普遍被覆もファイバー関手を与える。$\tilde{x}$ の選択は、この二つのファイバー関手をつなぐ道を指定したといえる。)

さて、普遍被覆は代数多様体の射の範囲では実現できないことが多い。例えば、$\mathbb{C}-\{0\}$ の普遍被覆は

$$\exp(2\pi i x) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}-\{0\}$$

であり、有理式では書けない。しかるに、Grothendieck の Riemann 存在定理が保障するのは「有限次被覆はみな代数的射」であるということである。

そこで、定理 1.3 の状況の下で、普遍被覆の代わりに全ての連結被覆を考える。具体的には、$(Y_\lambda, y_\lambda) \to (X, x)$ なる一点つき（連結）有限次ガロア（不分岐）被覆を全て考える。すると、上記の構成は全射

$$\rho_\lambda : \pi_1(X^{\mathrm{an}}, x^{\mathrm{an}}) \to \mathrm{Aut}(Y_\lambda/X) = \mathrm{Aut}(Y_\lambda^{\mathrm{an}}/X^{\mathrm{an}})$$

を引き起こし、したがって

$$\widehat{\rho} : \pi_1(X^{\mathrm{an}}, x^{\mathrm{an}}) \to \lim_{\leftarrow \lambda} \mathrm{Aut}(Y_\lambda/X)$$

を引き起こす。この、右辺の射影極限を代数的基本群という。

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(X, x) := \lim_{\leftarrow \lambda} \mathrm{Aut}(Y_\lambda/X)^{\mathrm{op}} \tag{1}$$

点 y_λ の選択があらわに見えないが、$\mathrm{Aut}(Y_\lambda/X)$ の間の構造射のところに使われている。

この定義 (1) は、X が連結スキームでさえあれば標数が正だろうが体上でなかろうができることに注意しよう。。

さて、$K = \overline{K} \subset \mathbb{C}$ の場合にもどる。$\mathrm{Aut}(Y_\lambda/X)$ のつくる射影系は $\pi_1(X^{\mathrm{an}}, x^{\mathrm{an}})/N$（$N$ は指数有限正規部分群を走る）のつくる射影系と同値になる。それは、被覆の理論により $\tilde{X^{\mathrm{an}}}$ を N で割ったものが複素多様体となり、それを実現する代数多様体 (Riemann 存在定理により存在する）を Y_λ とすればいいからである。すなわち、

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(X, x) := \lim_{\leftarrow \lambda} \mathrm{Aut}(Y_\lambda/X) \cong \lim_{\leftarrow N} \pi_1(X^{\mathrm{an}}, x^{\mathrm{an}})/N.$$

定義 1.5. 群 G に対し、その profinite 完備化 $G\widehat{\ }$ とは

$$G\widehat{\ } := \lim_{\leftarrow N:\text{指数有限正規部分群}} G/N$$

のこと。

一般に、有限群の射影極限としてあらわされる群を profinite 群という。それぞれの有限群に離散位相をいれることにより、profinite 群には位相が入り、コンパクトかつ完全非連結な位相群になる。

定理 1.6. X が $K=\overline{K}\subset\mathbb{C}$ 上の連結局所有限スキーム、x が X の $\mathbb{C}$ 有理点のとき標準的な同型

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(X,x)\cong\pi_1(X^{\mathrm{an}},x^{\mathrm{an}})^{\widehat{}}$$

が存在する。

さて、上の例は位相幾何的基本群により代数的基本群が決まってしまうことを表しているが、定義体が代数閉体でなかったり標数が 0 でなかったりすると状況は全く異なる。例えば、次の例のように体の spectrum の基本群は絶対ガロア群となる。

例 1.7. k を体とし、$X=\mathrm{Spec}k$ とする。Ω を代数閉体とし、$x:\mathrm{Spec}\Omega\to\mathrm{Spec}k$ を幾何的点とする。この時、$Y_\lambda\to X$ が連結（ガロア）finite etale であることと、Y_λ が k 上の有限次分離（ガロア）拡大体 L_λ の Spec であることとは同値になる。$k\subset L_\lambda\subset\Omega$ なる有限次（ガロア）分離拡大 L_λ を走ればそのような同型類は全て現れ、極限をとれば

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(X,x)=\lim_{\leftarrow}\mathrm{Aut}(L_\lambda/L)=Gal(L^{\mathrm{sep}}/L)$$

となる。

例 1.8. $\mathcal{O}$ を有限次代数体 K の整数環とする。$\pi_1(\mathcal{O})$ は K 上の最大不分岐代数拡大のガロア群となる。特に、そのアーベル化は K のイデアル類群と同型（ヒルベルトの類体論）。

2 モノドロミー

今、位相幾何における幾何的モノドロミー表現についてざっと概観し、基本群へのガロア群の作用を説明する。

2.1 局所的に自明な族

可微分多様体の圏の射

$$f:\mathcal{F}\to\mathcal{B}$$

を考える。これが局所的に自明な族であるとは、$\mathcal{B}$ の任意の点 b に対しその近傍 $U\subset\mathcal{B}$ が存在して U 上可微分多様体として

$$f^{-1}(U)\cong f^{-1}(b)\times U$$

となることである。この同型を定めると、U 内のファイバーは全て $f^{-1}(b)$ と同一視される。以下、$\mathcal{F}_b:=f^{-1}(b)$ とおく。

$\mathcal{B}$ 内の b を原点とする閉路 γ に対し、それをカバーする有限個の上のような U を取ってやると、それぞれの U_λ 内ではファイバーは同一視されているので、閉路に沿って同一視をたどって行ってやると最後に $\mathcal{F}_b$ の自己同相 $\hat{\gamma}$ を得る。$\mathcal{F}_b$ に基点 x をとると、π_1 の関手性から

$$\hat{\gamma}_* : \pi_1(\mathcal{F}_b, x) \to \pi_1(\mathcal{F}_b, \hat{\gamma}(x))$$

なる群同型を得る。基点が変わってしまうが、x と $\hat{\gamma}(x)$ を結ぶ道 β を一個固定すると

$$\pi_1(\mathcal{F}_b, x) \to \pi_1(\mathcal{F}_b, ga\hat{m}ma(x))$$

なる同型が定まるので、これを介して

$$\hat{\gamma}_* \in \mathrm{Aut}\pi_1(\mathcal{F}_b, x)$$

が定まるが、β の取り方の自由度は $\mathrm{Inn}\pi_1(\mathcal{F}_b, x)$ 分だけあるので、β によらないようにするには剰余群への像

$$\gamma_* \in \mathrm{Out}\pi_1(\mathcal{F}_b, x)$$

を考えればよい。ここで、$\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ は外部自己同型群である。

さて、γ の取り方や $\mathcal{B}$ での道の (ホモトピー類内での) とり方を変えるとこの群同型は変わる。が、次章で見られるように、基本群間の射

$$\pi_1(\mathcal{F}_b, x) \to \pi_1(\mathcal{F}, x)$$

が単射である場合は、γ の取り方と道のホモトピー類内での取り方に γ_* がよらないことが示され、よってベースの空間の基本群からファイバーの基本群への外モノドロミー表現

$$\pi_1(\mathcal{B}, b) \to \mathrm{Out}\pi_1(\mathcal{F}_b, x)$$

が定義される。(ファイバーの基本群が全空間の基本群に単射に入っていないときは、その像への外モノドロミー表現が同様にして得られる。)

2.2 短完全列によるモノドロミー表現

上のような定義では代数的基本群は扱えない。そこで、基本群への外モノドロミー表現を純群論的に構成してみる。

$f : \mathcal{F} \to \mathcal{B}$ を局所的に自明なバンドルとすると、次のホモトピー完全系列が存在する。

$$\to \pi_2(\mathcal{B}) \to \pi_1(\mathcal{F}_b, x) \to \pi_1(\mathcal{F}, x) \to \pi_1(\mathcal{B}, f(x)) \to \pi_0(\mathcal{F}_b, x) \to \cdots$$

ここで、$\pi_0(\mathcal{F}_b, x)$ が一点（つまりファイバーが連結）で、かつ $\pi_1(\mathcal{F}_b, x) \to \pi_1(\mathcal{F}, x)$ が単射であると仮定しよう。このとき、基本群へのモノドロミー作用の計算は短完全列を使って次のようにできる。$\gamma \in \pi_1(\mathcal{B}, f(x))$ を覆うそれぞれの U_λ について、自明化同型を使って $f^{-1}(U_\lambda)$ 上での道につながるように持ち上げてやる。このとき、全空間 $\mathcal{F}$ 内で、x から $x' \in \mathcal{F}_b$ への道 $\tilde{\gamma}$ に持ちあがるとしよう。x から x' へと結ぶ $\mathcal{F}_b$ 内での道 β を前と同様に固定すると $\beta^{-1} \circ \tilde{\gamma} \in \pi_1(\mathcal{F}_b, x)$ であり、この元による $\pi_1(\mathcal{F}_b, x)$ における共役作用が $\pi_1(\mathcal{F}_b, x)$ に制限されたときへの γ の外作用となる。群の言葉で言えば簡単で、

$$1 \to \pi_1(\mathcal{F}_b, x) \to \pi_1(\mathcal{F}, x) \to \pi_1(\mathcal{B}, f(x)) \to 1$$

で、右端の元 γ を真ん中の群に持ち上げ $\tilde{\gamma}$ とし、それを真ん中の群の中で共役に作用させて $\pi_1(\mathcal{F}_b, x)$ への作用を得る。持ち上げの自由度は内部自己同型に吸収される。

これは群の一般論で、

$$1 \to N \to G \to G/N \to 1$$

となっていたとき、共役作用 $G \to \mathrm{Aut}(N)$ は外作用

$$G/N \to \mathrm{Out}(N)$$

を引き起こす。

さて、代数的基本群の場合、「道」はないが短完全列はある。すなわち

定理 2.1. スキームの圏を考える。$f : F \to B$ を proper flat separable な射とし、B を局所ネーター連結スキーム、$x \in F$ を幾何的点、$b := f(x)$ とする。$F_b := f^{-1}(b)$ が連結のとき、

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(F_b, x) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(F, x) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(B, f(x)) \to 1$$

は完全系列となる [1, X Cor.1.4]。

左端の射が単射になる十分条件がいろいろある。

1. B が体の spectrum[1, IX Th.6.1],
2. B がネーター完備局所環, b が閉点の場合 (proper base change theorem [1, X Cor.2.2])。

定義 2.2. 上の定理で、左端の射が単射のとき、すなわち短完全系列

$$1 \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(F_b, x) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(F, x) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(B, b) \to 1 \tag{2}$$

が与えられたとき対応する

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(B,b) \to \mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{alg}}(F_b,x))$$

を基本群への外モノドロミー表現という。

例 2.3. B が体 K の spectrum により $B=\mathrm{Spec}K$ となっているとしよう。X/K を考え、$x=\mathrm{Spec}\overline{K}$ を X の幾何的点とする。X のファイバーが連結とは $X\times_K\overline{K}$ が連結であること、すなわち X が幾何的連結であることである。このとき、上の完全系列は短完全系列となり、外モノドロミー表現は

$$G_K := \mathrm{Gal}(K^{sep}/K) \to \mathrm{Out}(\pi_1^{\mathrm{alg}}(X\otimes\overline{K},x))$$

となる。これを X の基本群への外ガロア表現という。

注意 2.4. 上の f に関する条件 proper は、次のように弱められる。ある $F'\to B$ なる proper smooth 射が存在し、ある $D\subset F'$ なる B 上 relatively normal crossing な divisor が存在して $F=F'-D$ ならよい。([1, XIII-2]).
（こうしておかないと、開曲線の族などが扱えない）

注意 2.5. セクション $s:B\to F$ が与えられたならば、$b\in B$ に対して $x:=s(b)\in F_b$ をとることにより短完全系列 (2) は分裂する。したがって、持ち上げ $\tilde{\gamma}$ を $s_*(\gamma)$ ととることによって外部自己同型ではなく

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(B,b) \to \mathrm{Aut}(\pi_1^{\mathrm{alg}}(F_b,x))$$

なる表現ができる。(例：$B=\mathrm{Spec}K$ の時は、F の K-有理点は section を与える。)

2.3 解析接続による計算

ガロア作用を解析接続を用いて具体的に計算する方法をあっさりと解説する。

$K\subset\overline{K}\subset\mathbb{C}$ とし、X を K 上有限型正則連結スキームとする。

X の $\overline{K}$ 有理点 x を考え、(1) の (Y_λ,y_λ) を考える。$\mathcal{M}_x$ で、X^{an} 上 x^{an} の（複素解析的意味での）ある近傍で定義された複素正則関数の germ の集合全体とする。代数的な意味での正則関数を複素正則関数と考えることにより埋め込み

$$\mathcal{O}(Y_\lambda)_{y_\lambda} \to \mathcal{M}_x$$

が得られる。Y_λ を全部動かしたとき、その $\mathcal{M}_x$ での像の合併を M_x とすると、

$$\begin{aligned} M_x = \{ \quad & x^{\mathrm{an}} \text{ の近傍で定義された複素解析関数の芽で、} \\ & \mathcal{O}(\overline{X})_x \text{ 上整かつ } X^{\mathrm{an}} \text{ 全体の多価関数に解析接続されるもの } \} \end{aligned}$$

となる。解析接続により

$$\pi_1(X^{\mathrm{an}}, x^{\mathrm{an}}) \to \mathrm{Aut}(M_x/\mathcal{O}(\overline{X})_x)$$

となるが、左辺の profinite 完備化が右辺に一致し、これが $\overline{X} = X \otimes \overline{K}$ の代数的基本群となる。

$X \to \mathrm{Spec}K$ に対応する短完全系列 (2) は、通常のガロア群の短完全系列

$$1 \to \mathrm{Aut}(M_x/\mathcal{O}(\overline{X})_x) \to \mathrm{Aut}(M_x/\mathcal{O}(X)_x) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}(\overline{X})_x/\mathcal{O}(X)_x) \to 1$$

に他ならない。左端の群が $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\overline{X}, x)$ に同型、右端の群が G_K に同型である。

x が K-有理点上の幾何的点であるとき、セクション

$$s_x : G_K \to \mathrm{Aut}(M_x/\mathcal{O}(X)_x)$$

が与えられる。M_x の元で x においてゼロになるもの全体 $\tilde{x}$ は極大イデアルであり、不分岐性よりその極大イデアルの分解群 $D_{\tilde{x}}$ が

$$G_K \cong D_{\tilde{x}} \subset \mathrm{Aut}(M_x/\mathcal{O}(X)_x)$$

を与える。

具体的に $\gamma \in \pi_1(X^{\mathrm{an}}, x^{\mathrm{an}})$ と $\sigma \in G_K$ が与えられたとき、作用 $\sigma(\gamma)$ は $\mathrm{Aut}(M_x/\mathcal{O}(X)_x)$ で見れば $s_x(\sigma)\gamma s_x(\sigma)^{-1}$ に他ならない。この M_x の自己同型が、各 M_x の元に対してはある道に沿った解析接続で実現でき、それらの道が極限においては $\pi_1(X^{\mathrm{an}}, x^{\mathrm{an}})^{\wedge}$ の元を与えるのである。

2.4 tangential point と Puiseux 級数

X を前節のとおり体 $K \subset \overline{K} \subset \mathbb{C}$ 上の局所有限型正則連結スキームとする。X のコンパクト化 X^* をとり、$x \in X^*(K) - X(K)$ の formal 近傍において $X^* - X$ は normal crossing divisor であるとする。x において各 divisor の K 有理的法線ベクトルを与えることを X の x を起点とする K-有理 tangential point という。

以下では簡単のため、X は二次元で $X^* - X$ は x の近傍で二つの normal crossing divisorD_1, D_2 の合併であるとし、$K \in \mathbb{R}$ とする。

D_i の定義イデアルを x で局所化したものを $I(D_i) \subset \mathcal{O}(X)_x$ とし、$I(D_i)/(I(D_i) \cap m_x^2)$ $(i = 1, 2)$ の生成元の持ち上げを $t, \lambda \in m_x$ とする。これらは $X^{*\mathrm{an}}$ の x における局所座標を与え、$t = 0$ は D_1 に接し $\lambda = 0$

は D_2 に接している。これらのデータ (t,λ) を x を起点とする tangential point という（正確には、これらを $\mod m_x^2$ で見たデータ）。以下では、この tangential point を β であらわす。

t,λ によって X^{an} の x における近傍 U は、二つの「Disk 引く一点」の直積と同型となる。その部分集合であって、ある $\epsilon>0$ に対し

$$\{(t,\lambda)\in U|t,\lambda\in(0,\epsilon)\}$$

をすっぽり含んでいるようなものを（用語が確立されていないが）tangential point β の近傍という。

記号をあわせるためだけだが、$\mathcal{O}(\overline{X})_\beta:=\mathcal{O}(\overline{X})_x$ とおく。

$$M_\beta:=\{\begin{array}{l}\text{tangential point } \beta \text{ のある近傍で定義された複素解析関数で、}\\ \mathcal{O}(\overline{X})_\beta \text{ 上整かつ } X^{\mathrm{an}} \text{ 全体の多価関数に解析接続されるもの}\}\end{array}$$

とおくと、前節の M_x の役割を果たし

$$1\to\mathrm{Aut}(M_\beta/\mathcal{O}(\overline{X})_\beta)\to\mathrm{Aut}(M_\beta/\mathcal{O}(X)_\beta)\to\mathrm{Aut}(\mathcal{O}(\overline{X})_\beta/\mathcal{O}(X)_\beta)\to 1$$

となる。セクション $s_\beta:G_K\to\mathrm{Aut}(M_\beta/\mathcal{O}(X)_\beta)$ を与えると外ガロア表現が与えられるが、これには次のように Puiseux 級数を用いる。

自然数 N に対し $t^{1/N}$、$\lambda^{1/N}$ を β の近傍上で定義された t,λ の N 乗根であり、$t>0,\ \lambda>0$ となる部分では正の実数値をとるものとすると一意に定まる。

補題 2.6. β の開近傍で、M_β の元は Puiseux 級数に展開できる。すなわち埋め込み

$$M_\beta\to\cup_{N\in\mathbb{N}}\overline{K}[[t^{1/N},\lambda^{1/N}]]$$

が存在する。

そして、係数に G_K を作用させることによって M_β に作用させれば良い。(上の補題は、x の近傍から D_1,D_2 を除いたものの基本群が $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ であることから従う。一般には Abhiyankar の補題を使えば、標数 p でも分岐を tame に限れば正しい。)

例 2.7. γ を、β から β への X^{an} での道で、D_1 の周りを一周し D_2 には絡まないものとする。このとき、

$$\pi_1(X^{\mathrm{an}},\beta)\to\mathrm{Aut}(M_\beta/\mathcal{O}(\overline{X})_\beta)$$

における γ の像は、解析接続すなわち

$$t^{1/N}\to\xi_N t^{1/N},\quad \lambda^{1/N}\mapsto\lambda^{1/N}$$

で与えられる ($\xi_N := \exp(2\pi i/N)$)。
さて、$\sigma \in G_K$ に対し、その円分指標

$$\chi(\sigma) \in \hat{\mathbb{Z}}^\times$$

は

$$\sigma(\xi_N) = \xi_N^{\chi(\sigma)}$$

で与えられる。

$$\sigma(\gamma) = s_\beta(\sigma)\gamma s_\beta(\sigma)^{-1}$$

の M_β への作用は

$$t^{1/N} \overset{s_\beta(\sigma)^{-1}}{\mapsto} t^{1/N} \overset{\gamma}{\mapsto} \xi_N t^{1/N} \overset{s_\beta(\sigma)}{\mapsto} (\xi_N)^{\chi(\sigma)} t^{1/N}$$

と

$$\lambda^{1/N} \mapsto \lambda^{1/N}$$

で与えられる。これらの作用は $\gamma^{\chi(\sigma)}$ による作用に等しい。よって

$$\sigma(\gamma) = \gamma^{\chi(\sigma)}$$

を得る。

2.5 smooth base change

以下、煩雑なので π_1 と書いたら代数的基本群を表す。
$f : F := \mathbb{P}^1_{0,1,\infty_\mathbb{Z}} := \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[t, 1/t, 1/(1-t)] \to B := \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ で、$\mathbb{Z}$ 上の射影直線引く 3 点をあらわす。これは $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ 上 smooth で, proper ではないが注 2.4 の条件をみたす。幾何的点 $b \in B$ を取ったとき、

$$\pi_1(\mathbb{P}^1_{0,1,\infty_b}, x) \to \pi_1(\mathbb{P}^1_{0,1,\infty_\mathbb{Z}}, x) \to \pi_1(\mathrm{Spec}\mathbb{Z}, b) \to 1$$

であるが、左端の射は単射にはならない。
というのも、b を B の生成点上の幾何的点としたとき Belyi の定理により

$$\pi_1(\mathrm{Spec}\mathbb{Q}, b) \to \mathrm{Out}\pi_1(\mathbb{P}^1_{0,1,\infty_{\overline{\mathbb{Q}}}})$$

は単射であることが知られているのに、

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \pi_1(\mathbb{P}^1_{0,1,\infty_b}, x) & \to & \pi_1(\mathbb{P}^1_{0,1,\infty_\mathbb{Z}}, x) & \to & \pi_1(\mathrm{Spec}\mathbb{Z}, b) & \to & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & \pi_1(\mathbb{P}^1_{0,1,\infty_{\overline{\mathbb{Q}}}}, x) & \to & \pi_1(\mathbb{P}^1_{0,1,\infty_\mathbb{Q}}, x) & \to & \pi_1(\mathrm{Spec}\mathbb{Q}, b) & \to & 1
\end{array}$$

なる可換図式を見ると、もし上の左端が単射なら

$$\pi_1(\mathrm{Spec}\mathbb{Q}, b) \to \pi_1(\mathrm{Spec}\mathbb{Z}, b) \to \mathrm{Out}\pi_1(\mathbb{P}^1_{0,1,\infty\overline{\mathbb{Q}}})$$

と経由して、真ん中は自明だから表現が自明になってしまう。

実はかわりに、smooth base change 定理 (定理 2.8) というものを使うと

$$\pi_1(\mathrm{Spec}\mathbb{Q}, b) \to \mathrm{Out}\pi_1(\mathbb{P}^1_{0,1,\infty\overline{\mathbb{Q}}})^{(\ell)}$$

は ℓ の外で不分岐、すなわち $\pi_1(\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[1/\ell], b)$ を経由してくることが言える。

定理 2.8. (smooth base change 定理 [1, X Cor.3.9]) B をネーター完備局所環の spectrum、b をその閉点、η を生成点とする。$f : F \to B$ が proper smooth (より一般に注 2.4 の条件を満たすもの) とすると

1. b の剰余標数が 0 のとき、同型 $\pi_1(F_{\bar{b}}) \cong \pi_1(F_{\bar{\eta}})$ が存在する。
2. b の剰余標数が p のとき、同型 $\pi_1(F_{\bar{b}})^{(p')} \cong \pi_1(F_{\bar{\eta}})^{(p')}$ が存在する。ここに、${}^{(p')}$ は pro-p' 完備化（下を見よ)。

ここで、G を群 (離散群とみなす、一般には位相群で定義される)、p を素数としたとき、G の pro-p' 完備化とは

$$G^{(p')} := \lim_{\substack{\leftarrow \\ N:\text{指数 } p'}} (G/N)$$

のことで、ここで N が全ての指数有限正規（位相群の場合は開）部分群を走れば profinite 完備化であるが、それらのうち G/N の位数が p と互いに素なもののみを走らせて得られる極限をいう。

G の pro-p 完備化とは、G/N の位数が p のべきとなるような指数有限正規（開）部分群を走らせて得られる。

系 2.9. 上の設定で、b の剰余標数が p のとき、

$$\pi_1(\eta) \to \mathrm{Out}(\pi_1(F_{\bar{\eta}})^{(p')})$$

は $\pi_1(B, \bar{b}) \cong \pi_1(b, \bar{b})$ を経由する、すなわちこの表現は不分岐。

証明. 以下の図式で、上の行と真ん中の行を結ぶ三つの射のうち、真ん中と右の射は同型。

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & \pi_1(f^{-1}(\bar{b}), x) & \to & \pi_1(F, x) & \to & \pi_1(B, \bar{b}) & \to & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \pi_1(f^{-1}(\bar{\eta}), y) & \to & \pi_1(F, y) & \to & \pi_1(B, \bar{\eta}) & \to & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & \pi_1(f^{-1}(\bar{\eta}), y) & \to & \pi_1(F_\eta, y) & \to & \pi_1(\eta, \bar{\eta}) & \to & 1
\end{array}$$

もし真ん中の行の左端が単射なら図式をおいかければ従う。b の剰余標数が 0 のときには単射なのでこれで良い。p のときには、それぞれの行の左端を pro-p' 完備化し、それに合わせてそれぞれの行の真ん中を $\pi \to \pi^{(p')}$ の核で割ってやれば、縦横それぞれ三つの完全系列となる。 □

系 2.10.

$$G_Q \to \mathrm{Out}\pi_1(\mathbb{P}^1_{0,1,\infty\overline{\mathbb{Q}}})^{(\ell)}$$

は $\pi_1(\mathbb{Z}[1/\ell])$ を経由する、すなわち ℓ の外では不分岐な表現となっている。

3 Lie 環化

X/K を体 K 上の幾何的連結スキームとする。外ガロア表現

$$G_K \to \mathrm{Out}(\pi_1(X \otimes \overline{K}))$$

は大きい。ので、情報を取り出すために π_1 のアーベル化を考える。普通にアーベル化すると任意の正の整数 N に対し

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(X \otimes \overline{K}), \mathbb{Z}/N) \cong H^1_{et}(X \otimes \overline{K}, \mathbb{Z}/N)$$

となり、エタールコホモロジーの情報しかみないことになる。「リー環化」という、より群の情報を残したアーベル化の一種を行うと、より面白い現象が見られる。

まず、純群論的な graded リー環化の定義をし、それから extension の話をする。

3.1 群の graded リー環化

定義 3.1. Π を位相群とする。Π の降中心列 (lower central series) を

$$L^1\Pi := \Pi, \quad L^{n+1}\Pi := [L^n\Pi, \Pi]$$

で帰納的に定義する。ここに、$[,]$ は交換子積の像の閉包。

補題 3.2.

$$[L^m\Pi, L^n\Pi] \subset L^{m+n}\Pi.$$

定義 3.3. Π の部分群の下降列

$$\Pi = F^1\Pi \supset F^2\Pi \cdots$$

であって上のように

$$[F^m\Pi, F^n\Pi] \subset F^{m+n}\Pi.$$

を満たしているものを central filtration という。

　このとき、

$$\mathrm{Gr}^F\Pi := \oplus_{m\in\mathbb{N}}\mathrm{Gr}^F_m\Pi = \oplus_{m\in\mathbb{N}}F^m\Pi/F^{m+1}\Pi$$

とおく。まずこれは加法群である。そして、交換子積はこの加法群に積構造を与える。Hall の恒等式とよばれる等式により、この積はヤコビ律を満たし $\mathrm{Gr}^F\Pi$ は ($\mathbb{Z}$ 係数) リー環になる。これを、Π の F による graded リー環化という。

定義 3.4. 上の状況で、さらに位相群 Γ が Π に作用しているとする。

　このとき、整数 n に対して

$$I^n\Gamma := \{\gamma \in \Gamma | x \in F^m\Pi \Rightarrow \gamma(x)x^{-1} \in F^{m+n}\Pi \text{ for all } m, x\}$$

とおくとこれは Γ のフィルター付けとなり、$I^1\Gamma$ に制限すると central filtration になる。これを Γ に induce された induced filtration という。

　(Γ のうち、フィルター $F^n\Pi$ を保つ、すなわち各 F^n を stabilize する元の集合が $I^0\Gamma$ となる。)

　さて

$$\gamma \in I^n\Gamma$$

に対して、

$$D_n(\gamma) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Gr}^F_m\Pi, \mathrm{Gr}^F_{m+n}\Pi)$$

を

$$x \in F^m\Pi \mapsto D_n(\gamma)(x) := \gamma(x)x^{-1} \bmod F^{m+n+1}\Pi$$

で定める。すると $D_n(\gamma)$ は $\mathrm{Gr}^F\Pi$ の微分になり、

$$D_n : \mathrm{Gr}^I_n\Gamma \to \mathrm{Der}(\mathrm{Gr}^F\Pi)$$

なる写像を定める。$D := \oplus_{n\geq 1}D_n$ は

$$\mathrm{Gr}^I_{n\geq 1}\Gamma \to \mathrm{Der}(\mathrm{Gr}\Pi)$$

なるリー環準同型となる。

　さて、X/K を幾何的連結スキームとし

$$G_K \to \mathrm{Out}(\pi_1(\overline{X}))$$

を外ガロア表現とする。$\pi_1(\overline{X})$ に降中心列によるフィルトレーションをいれ、G_K に induced filtration を入れることができる。Out と Aut の違いは、「Aut への少なくとも一つの持ち上げが $I^n(\mathrm{Aut}\Pi)$ に入る」ものを $I^n(\mathrm{Out}\pi)$ と定義することで自然に拡張される。

これにより

$$\mathrm{Gr}^I(I^1G_K) \to \mathrm{OutDer}(\mathrm{Gr}^L\pi_1(\overline{X})^{(\ell)})$$

なる $\mathbb{Z}_\ell$-リー環の単射準同型ができる。

$K=\mathbb{Q}$, $X=\mathbb{P}^1_{0,1,\infty\mathbb{Q}}$ のとき、右辺は 2 元生成自由リー環の微分環 (を modulo 内部微分で見たもの) であり、各 grade は有限次元である。よって左辺もそう。このとき、

$$\mathrm{Gr}^I(I^1G_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

は Soulé 元と呼ばれる元により生成されることが示されている (Deligne-伊原の予想の生成部分、Hain-M または Deligne-Goncharov)。これらを生成元とする自由リー環かどうか (Deligne-伊原の問題) についてはまだ未解決。

3.2 背景のおはなし

降中心列を使うなどの人工的な操作をしているが、じつは自然な背景から出てきたものである（ことを筆者は最近になってやっと理解した)。お話的に説明する。

群 G を（標数ゼロの体上）線形化（リー環化）する標準的な方法に、マルセフ完備化がある。Π を位相群、K を標数 0 の位相体とするとき

$$\begin{array}{rcll}\Lambda & := & \{(\rho,U)| & U \text{ は } K \text{ 上の unipotent 代数群}, \\ & & & \rho:\Pi\to U(K) \text{ は像が Zariski dense な連続写像 } \}\end{array}$$

とするとこれは (unipotent 代数群の全射による) 射影系になる。

$$\Pi^{un} := \lim_{\leftarrow : U\in\Lambda} U$$

を Π の unipotent 完備化あるいはマルセフ完備化という。その代数群としてのリー環

$$\mathrm{Lie}(\Pi^{un}) = \lim_{\leftarrow : U\in\Lambda} \mathrm{Lie}(U)$$

は pro 有限次元べきゼロリー環 $/K$。これらの構成は関手的であるので、例えばガロア群が作用している代数的基本群 Π から、ガロア群が作用するべきゼロリー環 $\mathrm{Lie}(\Pi)/\mathbb{Q}_\ell$ が作れる。そして、ガロア群が作用する線形空

間なので、フロベニウスの固有値を使って Lie(π_1) に weight filtration を与えることができる。（Lie(π_1) の降中心列による filtration を考える。この graded quotient の直和は、Lie$(\pi_1)^{ab}$ が生成するリー環。ここへのガロア作用は H^1_{et} の双対への作用に一致するので、q 乗フロベニウス作用の固有値の絶対値は $\sqrt{q}$ (weight -1 部分) もしくは q(weight -2 部分)。ゆえに、weight filtration が定まる。）

いま、$\mathbb{P}^1_{0,1,\infty}/\mathbb{Q}$ に付随するガロア表現を考え、

$$\mathcal{P} := \mathrm{Lie}(\pi_1(\mathbb{P}^1_{0,1,\infty}/\overline{\mathbb{Q}}, \vec{01})^{(\ell)})$$

とおくと

$$G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut}\mathcal{P}$$

を得る。$\mathcal{P}$ における weight filtration と lower central filtration は $\mathcal{P}^{ab}$ が pure of weight -2 であることから一致する。そして、$G_{\mathbb{Q}}$ は $\mathrm{Gr}_W^{-2n}\mathcal{P}$ へ cyclotomic character の n 乗で作用する。

$\mathcal{P}$ から得られるガロア加群の完全系列

$$0 \to L^2\mathcal{P}/[L^2\mathcal{P}, L^2\mathcal{P}] \to \mathcal{P}/[L^2\mathcal{P}, L^2\mathcal{P}] \to \mathcal{P}^{ab} \to 0$$

は

$$H^1(G_{\mathbb{Q}}, \mathrm{Hom}(\mathcal{P}^{ab}, L^2\mathcal{P}/[L^2\mathcal{P}, L^2\mathcal{P}]))$$

をコホモロジー類を与える。金子昌信先生が次に解説する伊原康隆先生の仕事は、「このコホモロジー類は、$H^1(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(m))$ に射影すると　その生成元である Soulé cocycle となる ($m \geq 3$, 奇数)」ということを系として含んでいる。

graded Lie 環とマルセフリー環の関係だが、一般に有限生成 profinite 群 Π の $\mathbb{Q}_\ell$ 上のマルセフ完備化を $\mathcal{P}$ とし、その両方の降中心列を L であらわすと自然な写像 $\Pi \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}_\ell)$ から

$$\mathrm{Gr}^L\Pi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong \mathrm{Gr}^L\mathcal{P}(\mathbb{Q}_\ell)$$

なる graded リー環の同型が導かれる。

先の graded リー環化をとると extension の情報が失われるが、マルセフ完備化を出さずに純群論的に定式化できる上、$\mathbb{Q}_\ell$ 上でなく $\mathbb{Z}_\ell$ 上の議論ができるという利点がある。

参考文献

[1] A. Grothendieck and Mme M. Raynaud, “Revêtement Etales et Groupe Fondamental (SGA 1)”, Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag, 1971.

[2] Y. Ihara: *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications*, Ann. of Math., 123 (1986), 43–106.