代数学II(2017年度後期,2月実施予定）期末試験模擬問題（松本 眞）

注：途中の計算を**絶対に**消さないこと。途中の計算がないものは**採点できません。**答案用紙が足りない人は、遠慮なく追加の答案用紙を請求してください。

問題１. 次の５つの集合と二項演算は、

***:** よく見ると二項演算になっていない
A: マグマだが半群でない
B: 半群だがモノイドでない
C: モノイドだが群でない
D: 群である

のいずれか、判定せよ。(簡単な説明を添えよ。添えてないものは0点。) ただし、4では、nは1以上の自然数とする。

1. $(\mathbb{N}, \text{ベキ})$ 2. $(\mathbb{N}, \times)$ 3. $(\mathbb{Z}, +)$
4. (行列式1のn次実正方行列, $\times$) 5. (空集合, ただ一つの二項演算)

問題２. $\mathbb{C}^\times$ で0以外の複素数が積に関してなす群を表す。その二つの部分集合を

$$T := \{z \in \mathbb{C}^\times | |z| = 1\}, \quad \mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

で定義する。

次の各問に答えよ。

(A): (1) Tは、群$\mathbb{C}^\times$の部分群であると言えるか。理由つきで述べよ。
(2) $\mathbb{C}^\times$は、Tと$\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$の直積であると言えるか。理由つきで述べよ。
(B): (1) $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^\times$を$f(z) = |z|$で定義する。$f$が群準同型であることを示せ。
(2) fに関する群準同型定理を記述せよ。同型の両辺に現れる群を、具体的に記述すること。

問題３. S_nでn次対称群を表し、$g : S_n \to \{\pm 1\}$を置換の符号とする。gは群準同型であることは既知とする。gの核の位数を求めよ。

問題４. Gを群とする。GのGへの作用を$x \cdot g := xgx^{-1}$で与える。この作用が、Gの群Gへの群作用であることを示せ。すなわち、$g \mapsto g(-)g^{-1}$が$G \to \mathrm{Aut}(G)$なる群準同型を与えることを示せ。これを共役作用という。

問題５. (Fermatの小定理)

群$((\mathbb{Z}/n)^\times, \times, 1)$の位数を$\varphi(n)$であらわす。

(1) $a \in \mathbb{Z}$がnと互いに素な整数なら

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$$

となることを示せ。

(2) 上の条件で、さらにnが素数であるとする。このとき、

$$a^{n-1} \equiv 1 \mod n$$

であることを示せ。

問題６. 授業への感想、要望などを自由に述べよ。