代数学 II(2014 年度後期,11 月 26 日実施）中間試験問題（松本 眞）

注 : 途中の計算を**絶対に**消さないこと。途中の計算がないものは**採点できません。**答案用紙が足りない人は、裏を使うことを断わった上で、裏に書いてください。

問題１.

A: 集合 S における二項関係 $\sim$ が同値関係であることの定義を書け。

B: 次の集合 S と二項関係 $\sim$ に対し、$\sim$ が同値関係となるかどうか判定し、同値関係であるときには商集合 $S/\sim$ を記述せよ。(記述せよ、というのはあいまいであるが、よりわかりやすい集合との一対一写像を作れという意味である。解答にはその集合のみ書いても良い。)

(1) $S := \mathbb{R}$, $x \sim y$ は $x \geq y$ で定義。
(2) $S := \mathbb{R}$, $x \sim y$ は $x - y \in \mathbb{Z}$ で定義。
(3) $S := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \sim y$ は $xy > 0$ で定義。
(4) $S := \mathbb{R}$, $x \sim y$ は $xy \geq 0$ で定義。

C: 上の (3) の $(S, \sim)$ を考える。写像 $f : S \to S$ を $f(x) := x/|x|$ で定義する。

(1) $\bar{f} : S/\sim \to S$ が well defined であることを示せ。
(2) f に集合の準同型定理を適用して得られる同型を求めよ。
(3) $(S, \times, 1)$ はモノイドである（実は群でもある)。$f : S \to S$ がモノイド準同型であることを示し、f にモノイドの準同型定理を適用して得られる同型を求めよ。

問題２. 次の５つの集合と二項演算は、

***:** よく見ると二項演算になっていない
A: マグマだが半群でない
B: 半群だがモノイドでない
C: モノイドである

のいずれか、判定せよ。(簡単な説明を添えよ。添えてないものは 0 点。) ただし、4 では、n は 1 以上の自然数とする。

1. $(\mathbb{N}, \text{ベキ})$ 2. $(\mathbb{N}, \times)$ 3. $(\mathbb{Z}, +)$
4. (行列式 1 の n 次実正方行列, $\times$) 5. (空集合, ただ一つの二項演算)

問題３. n を 2 以上の自然数とする。半群 (行列式 0 の n 次実正方行列, $\times$) は、モノイドにならないことを示せ。

問題４. G を $\mathbb{R}^n$ からそれ自身への単射な実線形写像全体とする。

(1) G は写像の合成に関してモノイドをなすことを示せ。
(2) G は群となることを示せ。

問題５. $(G, \cdot, e)$ を有限モノイド（有限集合であるようなモノイド）とし、x をその元とする。

(1) $x^n = x^m$ となるような相異なる自然数 n, m が存在することを示せ。（ヒント：全部違っていたら？）
(2) x が可逆元である場合、$x^n = e$ となるような $n \geq 1$ が存在することを示せ。そのような $n \geq 1$ の最小値を x の位数という。
(3) (2) において、x の位数を n とする。m を自然数とするとき、$x^m = e$ となる必要十分条件は m が n の倍数であることであることを示せ。

問題６. 授業への感想、要望を述べよ。