令和７年度広島大学理学部

数学科

第３年次編入学試験学力検査問題

筆記試験（微積分，線形代数）（５問）

令和 6 年 9 月 10 日
自　9 時 00 分
至 12 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，微積分と線形代数の問題が**計 5 問**ある。総ページは，表紙を入れて **6 ページ**である。

2　解答用紙は，**5 枚**ある。**解答**はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入すること。

3　下書き用紙は，各受験者に **2 枚**ある。

4　**受験番号**は，すべての解答用紙と下書き用紙の所定の欄に必ず記入すること。

5　配付した解答用紙，下書き用紙は，持ち出さないこと。

[1] a を 1 より大きい実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{-nx}$ が収束するようなすべての実数 x のなす集合 I を求めよ。

(2) I を (1) のものとし，$f : I \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-nx} \quad (x \in I)$$

で定める。次の (i), (ii) に答えよ。

(i) I 上で f の導関数 f' を求めよ。

(ii) I 上で f の原始関数を 1 つ求めよ。

(3) 実数 b, c は $0 < b < c$ を満たすとする。このとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na^{-nx}$ が閉区間 $[b, c]$ で一様収束することを示せ。

[2] A を 3 つの固有値 1, 2, 3 をもつ 3×3 行列とする。また

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 に対する A の固有ベクトル,

$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対する A の固有ベクトル,

$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$ は固有値 3 に対する A の固有ベクトル

であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) A^2 のすべての固有値を求めよ。また，各固有値に対する固有ベクトルを 1 つ与えよ。

(2) 行列 A を求めよ。

(3) 行列 $A^5 - 6A^4 + 10A^3 - 10A$ を求めよ。

(4) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = (A^5 - 6A^4 + 10A^3 - 10A)\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

で定める。f が全単射であることを示せ。

[3] 自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) I_1 を求めよ。

(2) n を自然数とする。定積分

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$$

を I_n と I_{n+1} を用いて表せ。

(3) 任意の自然数 n に対して

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left\{\frac{1}{2^n} + (2n-1)I_n\right\}$$

が成り立つことを示せ。

(4) n を自然数とする。定積分

$$A = \int_0^{\pi/4} \cos^{2n} x\,dx \quad と \quad B = \int_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x)^{2n}\,dx$$

を n と I_{n+1} を用いて表せ。

[4] 3×3 行列 $A,\, B$ を

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 10 & 2 & 6\\ -5 & -2 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ -4 & 0 & -2\\ -4 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) A のすべての固有値を求めよ。また，各固有値 λ に対して，固有空間 $V(\lambda)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^3 \mid A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\}$ の基底を 1 組与えよ。

(2) A の各固有値 λ に対して $W(\lambda)=\{A\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^3\}$ の次元を求めよ。

(3) 次の 2 つの条件を満たすベクトル $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3\in\mathbb{C}^3$ を 1 組与えよ。

- $j=1,2,3$ について，$\boldsymbol{p}_j$ は A の固有ベクトルであり，かつ B の固有ベクトルでもある。
- $\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2,\, \boldsymbol{p}_3$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である。

(4) 2×2 行列 $C,\, D$ を

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

で定める。このとき，C と D の両方の固有ベクトルであるような $\boldsymbol{p}\in\mathbb{C}^2$ は存在しないことを示せ。

[5] $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y^2)\sin y}{\sqrt{x^4+y^4}} & ((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) f が点 $(0,0)$ で連続であることを示せ。

(2) 任意の実数 $x\neq 0$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ を求めよ。

(3) f が点 $(0,0)$ で偏微分可能であるか否かを答え，それを証明せよ。

(4) f が点 $(0,0)$ で全微分可能であるか否かを答え，それを証明せよ。