広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午前）	令和３年８月実施

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**]　次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) 逆行列を使って，連立方程式 $\begin{cases} 3x+y+2z=1 \\ -x+y+4z=1 \\ 5y+2z=1 \end{cases}$ の解を求めよ．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ の行列式および逆行列を求めよ．

(B) 線形空間の元 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ が与えられたとき，それらの張る部分空間を $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ と書くものとする．$\mathbb{R}^3$ の元 $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して，$V := \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$, $W := \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \rangle$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $V + W := \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\}$ の次元を求めよ．

(2) $V \cap W$ の基底を一組求めよ．

(C) V を実線形空間とし，$b : V \times V \to \mathbb{R}$ を V 上の内積とする．$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ を V の元として，写像

$$f : V \to \mathbb{R}^k;\ \mathbf{v} \mapsto (b(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}), \ldots, b(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}))$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) V が $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ で張られるとき，f は単射であることを示せ．

(2) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立であるとき，f は全射であることを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午前）	令和３年８月実施

[**2**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) $0 < p < q < 1$ とし，$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = px^2 + qy^2 + e^{-(x^2+y^2)}$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x についての偏導関数 $f_x(x, y)$ と，y についての偏導関数 $f_y(x, y)$ を計算せよ．

(2) $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ となる点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ．

(3) $f(x, y)$ のすべての極値を求めよ．

(4) $f(x, y)$ の最大値と最小値を調べよ．

(B) 以下の問に答えよ．ただし，(1), (2) では I を $\mathbb{R}$ の区間とする．

(1) $f(x)$ を I 上で 2 回微分可能であり $f(x) > 0$ $(x \in I)$ を満たす関数であるとする．このとき，$g(x) = \log f(x)$ $(x \in I)$ の 2 階導関数 $g''(x)$ を計算し，$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ を用いて表せ．

(2) $f(x)$ を I 上で 2 回微分可能であり $f''(x) \geq 0$ $(x \in I)$ を満たす関数であるとする．このとき，次が成立することを示せ．

任意の $x_1, x_2 \in I$ と任意の $t \in [0, 1]$ に対して

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

が成立する．

(3) 次の (i), (ii), (iii) をすべて満たすような閉区間 $[0, 1]$ 上の関数 $f(x)$ は**存在しない**ことを示せ．

(i) $f(x)$ は $[0, 1]$ 上で 2 回微分可能である．

(ii) $f(0) = 0$ かつ $f(x) > 0$ $(x \in (0, 1])$ を満たす．

(iii) $f(x)f''(x) \geq \big(f'(x)\big)^2$ $(x \in [0, 1])$ を満たす．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午前）	令和３年８月実施

[**3**] 次の (I), (II) のいずれかの問に答えよ．((II) は次のページにある)

(I) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) X, Y, Z を集合とする．写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to Z$ について，f, g が単射であれば $g \circ f$ も単射であることを示せ．

(2) X, Y, Z を集合とする．写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to Z$ について，$g \circ f$ が全射であれば f も全射であると言えるか．理由とともに答えよ．

(3) X と Y を位相空間として，連続な全射 $f : X \to Y$ が存在するものとする．X が連結であるとき，Y も連結であると言えるか．理由とともに答えよ．

(B) 以下の問に答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は通常の位相により位相空間と考え，また $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ には $\mathbb{R}$ の部分空間としての位相を与えるものとする．

(1) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}; a \mapsto [a - \sqrt{2}]$ は連続であるかどうか判定せよ．ただし，実数 r に対して $[r]$ は r を超えない最大の整数である．

(2) $\mathbb{Q}$ の空でない開集合は無限個の元を持つことを示せ．

(3) 連続な単射 $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ は存在しないことを証明せよ．

(II) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) コインを n 回投げたときに表の出る回数を S_n とする．$n \geq 10^4$ ならば，

$$\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq 0.05$$

となる確率は 0.01 以下であることを示せ．ただし，コインの裏表の出方は同様に確からしいとする．

(2) ウイルス性の感染症 V に対する検査 T がある．V の感染者のうちの a % が T で正しく陽性を示す．一方，V の非感染者のうちの b % が誤って T で陽性を示す．現在，人口の c % が V に感染している．検査 T で陽性を示した人が，実際に V に感染している確率を求めよ．

(B) $X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立に同一のパラメータ θ $(\theta > 0)$ の指数分布に従う確率変数とする．ただし，パラメータ θ の指数分布の確率密度関数は

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

である．以下の問に答えよ．

(1) $\mathrm{E}(X_1) = \theta$ となることを示せ．

(2) $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ とし，θ の最尤推定量を $\hat{\theta}$ とする．$\hat{\theta} = \bar{X}$ となることを示せ．

(3) $\hat{\theta}$ は θ の不偏推定量であることを示せ．

(4) $V = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\,\hat{\theta}$ とおく．V^2 は θ^2 の不偏推定量であることを示せ．ただし，必要であれば，$\mathrm{E}(X_1^2) = 2\theta^2$ であることは証明なしで用いてよい．