広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プログラム	専門科目	令和 2 年 1 月実施

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[**1**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}^3$ におけるベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ a-2 \\ 1+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3-b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ a-1 \\ 3 \end{pmatrix}$ が一次従属になるために $a, b \in \mathbb{R}$ が満たすべき条件を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られる $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W とする. W の $\mathbb{R}^4$ の標準内積に関する直交補空間 $W^{\perp}$ の正規直交基底を一組求めよ.

(B) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

により定めるとき, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A は対角化可能か否かを理由とともに答えよ.

(3) A のジョルダン標準形 J と, $P^{-1}AP = J$ となるような正則行列 P を一つ求めよ.

(4) A^n の第 $(2,2)$ 成分を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数　学　プログラム	専門科目	令和２年１月実施

[**2**]　次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) $\mathbb{R}^2$ 上の実数値連続関数 $f(x,y)$ が $\displaystyle\lim_{|x|+|y|\to\infty} f(x,y)=\infty$ を満たすとする．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{|x|+|y|\to\infty} f(x,y)=\infty$ となることの定義を述べよ．また，関数 $f(x,y)$ が最小値をもつことの定義を述べよ．

(2) $R>0$ が存在して $|x|+|y|>R$ のとき $f(x,y)>f(0,0)$ となることを示せ．

(3) 関数 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ において最小値をもつことを示せ．

(B) 以下の問に答えよ．

(1) $f(x)=\sin x$ $(x\in\mathbb{R})$ がマクローリン級数展開可能であることを示し，総和記号を用いてマクローリン級数展開を与えよ．ただし，関数 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級であることは証明なしに用いてもよい．

(2) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して不等式

$$0\le x^2-\sin(x^2)\le\frac{x^6}{6}$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g(x,y)$ が $(x,y)=(x_0,y_0)$ において全微分可能であることの定義を述べよ．

(4) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $h(x,y)$ を

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y)\ne(0,0)),\\ 1 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

により定義するとき，$h(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において全微分可能であることを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プログラム	専門科目	令和２年１月実施

[**3**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) a, b を正の実数とする．$x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$
\begin{aligned}
d(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \\
\rho(x, y) &= a|x_1 - y_1| + b|x_2 - y_2|
\end{aligned}
$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) d と ρ は $\mathbb{R}^2$ 上の距離であることを示せ．

(2) $A \subset \mathbb{R}^2$ が距離 d に関して開集合であることの定義を述べよ．

(3) 距離 d に関する開集合と距離 ρ に関する開集合は一致することを示せ．

(B) 実数の集合 $\mathbb{R}$ を通常の位相で位相空間とみなし，その位相（開集合系）を $\mathcal{O}$ と表す．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，部分集合系 $\mathcal{O}_f = \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{O}\}$ は集合 $\mathbb{R}$ の位相であることを示せ．

(2) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ で定める．このとき (1) で定めた $\mathbb{R}$ 上の位相 $\mathcal{O}_f$ はハウスドルフの分離公理を満たさないことを示せ．

(3) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，(1) で定めた $\mathbb{R}$ の位相 $\mathcal{O}_f$ が $\mathbb{R}$ の通常の位相 $\mathcal{O}$ に一致するとき，次を示せ．

(i) f は単射である．

(ii) 任意の開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し，$f(I) \subset \mathbb{R}$ は開区間である．