平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

選択問題：次の [4] ∼ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ.

[4] 乗法的単位元を持つ可換環 R を考える．$a_1, \ldots, a_n \in R$ により生成される R のイデアルを $(a_1, \ldots, a_n)$ と書く．R のイデアル I, J に対し，

$$I : J \ := \ \{a \in R \mid \text{任意の } b \in J \text{ に対し } ab \in I \text{ となる}\}$$

とおく．また，R のイデアル I に対し

$$\sqrt{I} \ := \ \{a \in R \mid \text{ある正整数 } N \text{ が存在して } a^N \in I \text{ となる}\}$$

とおく．

(1) I, J が R のイデアルなら $I : J$ も R のイデアルであることを示せ.

(2) I が R のイデアルなら $\sqrt{I}$ も R のイデアルであることを示せ.

(3) I を R のイデアルとし，剰余環 R/I を $\overline{R}$ と書く．$\overline{R}$ におけるイデアル (0) を考える．このとき，自然な環の同型 $\overline{R}/\sqrt{(0)} \cong R/\sqrt{I}$ が存在することを示せ.

複素数係数の 1 変数多項式環 $\mathbb{C}[x]$ を考える．複素数 s, t に対し，イデアル

$$I_{s,t} \ := \ (x^2 + sx + t)$$

を考える.

(4) $I_{s,t} = \sqrt{I_{s,t}}$ となるための必要十分条件は $s^2 - 4t \neq 0$ であることを示せ.

(5) $I_{0,-1} : I_{s,t} = I_{0,-1}$ となるための必要十分条件は $(1+t)^2 \neq s^2$ であることを示せ.

複素数係数の 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ を考える．複素数 c に対し，イデアル

$$J_c \ := \ (x^2 + y^2 - cy, y - x^2)$$

を考える.

(6) $\sqrt{J_c}$ が素イデアルとなる複素数 c をすべて求めよ.

平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**5**]　正則 2 次複素正方行列が行列の積に関してなす群を $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ で表す．正整数 n に対し，$\zeta := e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ とおき，$A := \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ とする．

(1) $S := \{A^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の部分群であることを示し，その位数を求めよ．

(2) $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ として

$$G := S \cup \{A^i B \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

とおくとき，G は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の部分群であることを示せ．

(3) S は G の正規部分群であることを示せ．

(4) $\mathbb{C}$ 上の 2 変数有理関数体 ($\mathbb{C}$ 係数 2 変数有理式のなす体)

$$K := \mathbb{C}(x,y)$$

を考え，

$$L := \mathbb{C}(x^n + y^n, xy) \subset K$$

とおく．$K = L(x)$ であること，および，x は L 上代数的であることを示せ．

(5) $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，写像 $\sigma_\gamma : K \to K$ を

$$\sigma_\gamma(f(x,y)) := f(ax + cy, bx + dy)$$

により定義すると，σ_γ は体 K の自己同型写像であり，写像 $\gamma \mapsto \sigma_\gamma$ により $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ は K の自己同型群の部分群になる（これらのことは示さなくてよい）．K は L のガロア拡大で，そのガロア群は G に一致することを示せ．

(6) $M := \{f(x,y) \in K \mid f(\zeta x, \zeta^{-1} y) = f(x,y)\}$ とする．拡大次数 $[M : L]$ を求め，M の L 上の生成元（$M = L(\alpha)$ となる α）を 1 つ求めよ．

(7) K と L の中間体で L の 2 次拡大になっているものは全部でいくつあるか？

平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**6**]　以下の全ての問に答えよ．

(A)　M を C^∞ 級多様体，O を M 内の空でない開集合とする．

(1) (U, φ) を M の座標近傍とする．$(U \cap O, \varphi|_{U\cap O})$ が O の座標近傍であることを示せ．

(2) O は C^∞ 級多様体となる．その局所座標系を与え，座標変換が C^∞ 級であることを確かめよ．

(3) 包含写像 $i : O \to M$ が C^∞ 級写像であることを，定義に従って示せ．

(B)　L, M, N を C^∞ 級多様体とし，$f : M \to N$, $g : N \to L$ を C^∞ 級写像とする．

(1) $g \circ f$ が C^∞ 級写像であることを，定義に従って示せ．

(2) $p \in M$ とする．f の p における微分 $(df)_p$ の定義を述べよ．

(3) $p \in M$ とする．上で述べた定義に従って，$(d(g \circ f))_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p$ を示せ．

(4) M と N が C^∞ 級同相であるとき，それらの次元が等しいことを示せ．

平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**7**]　複素平面 $\mathbb{C}$ の自己同相写像 α, β, γ を以下で定義する．

$$\alpha(z) = z + 1, \quad \beta(z) = z + i, \quad \gamma(z) = \bar{z} + 1.$$

α と β によって生成される同相写像の群を Λ とし，β と γ によって生成される同相写像の群を Γ とする．群 Λ による $\mathbb{C}$ の商空間 $\mathbb{C}/\Lambda$ を X で表し，群 Γ による $\mathbb{C}$ の商空間 $\mathbb{C}/\Gamma$ を Y で表す．以下の全ての問に答えよ．

(A) 次の問に答えよ．

(1)　$\mathbb{C}$ の基本群を求めよ．

(2)　X の基本群を求めよ．

(3)　Y から 1 点を除いて得られる空間 Y' の基本群を求めよ．

(4)　Y の基本群の群表示を求めよ．

(5)　X と Y の基本群は同型でないことを証明せよ．

(B) 次の問に答えよ．

(1)　X, Y の整数係数 2 次元ホモロジー群 $H_2(X)$, $H_2(Y)$ を求めよ．

(2)　$\mathbb{C}$ 上の連続写像 $F(z) = 2z$ を考える．このとき，連続写像 $f : X \to X$ で $f \circ p = p \circ F$ となるものが存在することを証明せよ．ただし，p は射影 $\mathbb{C} \to X$ を表す．

(3)　(2) の連続写像 f が誘導する準同型 $f_* : H_2(X) \to H_2(X)$ を求めよ．

(4)　(2) の連続写像 f とホモトピックな任意の連続写像は全射であることを証明せよ．

平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**8**]　$f(z) = e^z - 1$ とする．また，$z \in \mathbb{C}$ の実部を $\mathrm{Re}\, z$，虚部を $\mathrm{Im}\, z$ で表す．次の問に答えよ．

(1) $\{f(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ はどんな集合か.（答えのみでよい.）

(2) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $|e^{\mathrm{Re}\, z} - 1| \leq |f(z)| \leq e^{\mathrm{Re}\, z} + 1$ が成り立つことを示せ.

(3) $f(z) = 0$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ.

(4) 曲線 $C : z = 10\, e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ に沿う複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{f(z)}\, dz$ を求めよ.

(5) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < 5\pi\}$ とする．関数 g は D の閉包 $\overline{D}$ を含む領域で正則で

$$\sup\{|g(z)| \mid z \in D\} < 1$$

とする．このとき，$g(z) = f(z)$ を満たす $z \in D$ の個数を求めよ．ただし，n 重解は n 個と数える.

(6) $\mathbb{C}$ 上の正則関数 h が次の条件 (i), (ii), (iii), (iv) を満たすならば，$h \equiv 0$ であることを示せ.

(i) $h(0) = 0$ である.

(ii) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $h(z + 2\pi i) = h(z)$ を満たす.

(iii) $\mathrm{Re}\, z < 0$ ならば $|h(z)| \leq 1$.

(iv) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| \leq \pi\}$ とする．Ω の中から極限をとるとき $\displaystyle\lim_{\substack{\mathrm{Re}\, z \to +\infty \\ z \in \Omega}} e^{-\mathrm{Re}\, z} |h(z)| = 0$ を満たす.

平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**9**]　以下の問に答えよ．

(1) 実数 y に対してルベーグ積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x|y|}\,dx$ を求めよ．

(2) 実数 a に対して累次積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos ay)xe^{-x|y|}\,dy\Big)dx$ を求めよ．

(3) 実数 a に対して次の等号が成立することを示せ．

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos ay}{y^2}\,dy=\pi|a|.$$

(4) 実数 $x>0$ に対して次が成立することを示せ．

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin(y+yx)+\sin(y-yx)}{y}\,dy=\begin{cases}2\pi & (0<x<1)\\ \pi & (x=1)\\ 0 & (x>1)\end{cases}.$$

(5) 区間 $(0,+\infty)$ 上のルベーグ可積分関数 f に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数 g を

$$g(y)=\int_0^{+\infty}f(x)\cos yx\,dx$$

により定める．関数 g は連続であることを示せ．

(6) 関数 f, g を (5) のものとする．次が成立することを示せ．

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}g(y)\frac{\sin y}{y}\,dy=\pi\int_0^1 f(x)\,dx.$$

平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**10**]　$X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ は互いに独立に平均 1 の指数分布に従う確率変数とし, その分布関数を F とする. すなわち,

$$F(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z} & (z \geq 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

である.

$$\phi(x,y) = \begin{cases} 1 & (y > x) \\ -1 & (y \leq x) \end{cases},$$

$$\phi_{10}(z) = \mathrm{E}[\phi(z, Y_1)], \quad \phi_{01}(z) = \mathrm{E}[\phi(X_1, z)]$$

とし,

$$V = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\phi(X_i, Y_j), \quad W = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{\phi_{10}(X_i) + \phi_{01}(Y_i)\}$$

と定義する. このとき以下の問に答えよ.

(1) $U = F(X_1)$ の分布は 区間 $(0,1)$ 上の一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ であることを示せ. ただし, $\mathrm{U}(0,1)$ は確率密度関数

$$g(u) = \begin{cases} 1 & (0 < u < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

によって定まる連続型分布である.

(2) $\phi_{10}(z)$, $\phi_{01}(z)$ を, それぞれ F, z を用いて表わせ.

(3) 平均 $\mathrm{E}[V], \mathrm{E}[W]$, および分散 $\mathrm{Var}[W]$ を求めよ.

(4) $T_{ij} = \phi(X_i, Y_j) - \phi_{10}(X_i) - \phi_{01}(Y_j)$, $(i, j = 1, \ldots, n)$ と定義する.
このとき, 共分散 $\mathrm{Cov}[T_{11}, T_{11}], \mathrm{Cov}[T_{11}, T_{21}], \mathrm{Cov}[T_{11}, T_{12}], \mathrm{Cov}[T_{11}, T_{22}]$ を求めよ.

(5) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[n(V - W)^2] = 0$ であることを示せ.

(6) $\sqrt{n}(V - W)$ は, $n \to \infty$ のとき 0 に確率収束することを示せ.

(7) $\sqrt{n}V$ は $n \to \infty$ のとき, 正規分布に分布収束することを示せ.

平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**11**] $\lambda > 0$ とする．関数 f は $\mathbb{R}$ 上の連続な実数値関数で $[0,\infty)$ で有界とし，関数 q は $\mathbb{R}$ 上の非負値連続関数で $\lim_{t\to\infty} q(t) = \lambda^2$ とする．$\mathbb{R}$ における 2 つの微分方程式

$$w''(t) - \lambda^2 w(t) = f(t) \qquad \cdots\cdots \text{(A)}$$
$$y''(t) - q(t)y(t) = 0 \qquad \cdots\cdots \text{(B)}$$

について，次の問に答えよ．

(1) $u_1(t) = -\dfrac{e^{\lambda t}}{2\lambda}\displaystyle\int_t^\infty e^{-\lambda s} f(s)\,ds$ は微分方程式 $u'(t) - \lambda u(t) = \dfrac{f(t)}{2\lambda}$ の解であることを示せ．

(2) u_1 は (1) のものとし，$u_2(t) = \dfrac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}\displaystyle\int_0^t e^{\lambda s} f(s)\,ds$ とする．関数 $w_1 = u_1 - u_2$ は微分方程式 (A) の解であることを示せ．

(3) 微分方程式 (A) の一般解を (2) の w_1 を用いて答えよ．

(4) 微分方程式 (B) の解 y に対し $\dfrac{d}{dt}(y'(t)y(t)) \geq 0$ が成り立つことを示せ．

(5) 微分方程式 (B) の非自明な解 y は 2 個以上の零点を持たないことを示せ．ただし，y の零点とは $y(t_0) = 0$ となる t_0 のことである．

(6) 微分方程式 (B) の解 y が $[0,\infty)$ で有界ならば，y' も $[0,\infty)$ で有界であることを示せ．

(7) 微分方程式 (B) の解 y のうち $[0,\infty)$ で有界で $y(0) = 1$ となるものは $[0,\infty)$ でただ一つであることを示せ．