平成１６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)		受験番号	M

平成１５年　8月　２０日　　　９：００　～　１２：００

注　意　事　項

１. 以下の用紙が配布されている.

問題用紙（表紙を含む.）　４　枚

解答用紙　３　枚

下書用紙　１　枚

２. 問題は全部で　３　問ある.

３. 解答は問題毎に必ず一枚ずつ別々の用紙を用い，それぞれの解答用紙に受験番号を記入し解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

４. 試験問題の表紙，解答用紙及び下書用紙の全てに受験番号を記入せよ.

５. 試験終了時には，全ての用紙を提出すること.

平成１６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[1] 次の問に答えよ．

(1) 次の行列の行列式を，できるだけ因数分解した形で求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

(2) xy 平面上の 3 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) の x 座標がすべて異なるとき，これら 3 点を通る曲線で方程式

$$(*) \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

で表されるものがただ１つ存在することを示せ．ただし，a_0, a_1, a_2 は実定数とする．

(3) 上の (2) において，方程式 $(*)$ を満たすような全ての x, y に対して

$$\begin{vmatrix} y & 1 & x & x^2 \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \\ y_3 & 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つことを示せ．ここで，左辺は行列式を表す．

(4) 上の (2) において，方程式 $(*)$ が

$$y = \sum_{j=1}^{3} y_j \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

と表されることを導け．ここで $\prod_{j \neq i}$ は j と異なるすべての i $(1 \leq i \leq 3)$ にわたる積を表す．

(5) xy 平面上に，x 座標が互いに異なる n 個の点 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ が与えられたとする．このとき，これら n 個の点を通る曲線であって，

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

の形の方程式で表されるものがただ一通りあることを示し，それが

$$y = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

と表せることを証明せよ．

平成１６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)

[**2**] $f(x)$ を実数上定義された何回でも微分可能な関数とする．級数

$$(*) \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x)$$

を考える．ここに，$f^{(n)}$ は f の n 階導関数を表す．$f^{(0)} = f$ とする．

(1) a を実定数とする．$f(x) = \cos ax$ のとき，級数 $(*)$ が収束すると仮定して，$g(x)$ を求めよ．

(2) 上と同様に $f(x) = \cos ax$ とする．級数 $(*)$ が全ての x で収束するような a の範囲を証明つきで求めよ．

(3) 一般の $f(x)$ を考える．級数 $(*)$ が一様収束するとき，$g(x)$ は微分可能で

$$g(x) - g'(x) = f(x)$$

となることを証明せよ．

(4) 一般の $f(x)$ を考える．微分方程式

$$g(x) - g'(x) = f(x)$$

を満たす関数 $g(x)$ を求めよ．(ヒント：$g(x)e^{-x}$ を微分する．)

(5) 上の (2) で求めた範囲の a に対し，上の (1)-(4) を用いて不定積分

$$\int (\cos ax)e^{-x}dx$$

を計算せよ．

(もし，どうしても (1)-(4) を用いて答が求まらない場合には，この問だけ独立に解いてもいくらかの部分点を与える．)

(6) 自然数 m に対し

$$-e^x \int x^m e^{-x}dx$$

を求めよ．

平成１６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)

[3] $\mathbf{R}^2$ を２次元ユークリッド空間とする．通常の距離 (ユークリッド距離) により，距離空間とみなす．

(A1) 距離空間 (X, d) において，X の点列 $\{a_n\}$ が $a \in X$ に収束することの定義を述べよ．

(A2) 距離空間 $\mathbf{R}^2$ の点列 $\{a_n\}$ が点 $a \in \mathbf{R}^2$ に収束することと，a_n の x 座標がつくる数列 $\{x_n\}$ が点 a の x 座標に収束し，かつ a_n の y 座標がつくる数列 $\{y_n\}$ が点 a の y 座標に収束することとが同値であることを収束の定義に基づいて証明せよ．

(A3) 距離空間 $\mathbf{R}^2$ の点列 $\{a_n\}$ が点 $a \in \mathbf{R}^2$ に収束するならば，

$$b_m = \frac{1}{m}(a_1 + \cdots + a_m) \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

とおいたとき点列 $\{b_m\}$ も点 a に収束することを示せ．

(B1) 対角線集合 $\Delta = \{(x, x) | x \in \mathbf{R}\}$ は，$\mathbf{R}^2$ の閉部分集合であることを示せ．

(B2) $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を二つの連続写像とするとき，$\{a \in \mathbf{R}^2 | f(a) = g(a)\}$ は $\mathbf{R}^2$ の閉部分集合であることを示せ．

(B3)

$$f_i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

を連続写像の族とする．任意の自然数 n に対しある $a_n \in \mathbf{R}^2$ が原点中心の単位円内に存在して

$$f_1(a_n) = f_2(a_n) = \cdots = f_n(a_n)$$

を満たすならば，ある $b \in \mathbf{R}^2$ が存在して

$$f_1(b) = f_i(b)$$

が全ての i について成立することを示せ．